

### 3. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE.

**Věta C.** Existují funkce  $\sin(x)$  a  $\cos(x)$  z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$  a číslo  $\pi \in (0, \infty)$  tak, že platí:

1.  $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$  pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,  
 $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$  pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\sin(-x) = -\sin(x)$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  
 $\cos(-x) = \cos(x)$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;
3. funkce  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  jsou spojité v  $\mathbb{R}$ ;
4. funkce  $\sin(x)$  je rostoucí v  $[0, \pi/2]$  a  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ;
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

Funkce  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  jsou těmito vlastnostmi určeny jednoznačně.

---

Z 1–5 lze vyvodit všechny další známé vlastnosti funkcí  $\sin x$  a  $\cos x$ .

- $\cos 0 = 1$ , neboť  $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2) \cos 0 + \cos(\pi/2) \sin 0 = \cos 0 + 0$  (dle 1, 4)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ , neboť  $1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$  (dle 1, 2, 4 a předchozího bodu)
- $|\sin(x)| \leq 1$ ,  $|\cos(x)| \leq 1$  v  $\mathbb{R}$  (dle předchozího bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$ ,  $\cos(\pi) = -1$ ,  $\sin(-\pi/2) = -1$   
(dobrovolné domácí cvičení)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ ,  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ , (dle 1 a předchozího)
- funkce  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  jsou  $2\pi$ -periodické (dle předchozího)
- funkce  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  lze vzájemně nahradit:  
 $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$   
 $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$   
(dle 1)

- $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$   
 $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$   
 - tyto vzorce odvodíme následujícím trikem: položíme  $x := (a + b)/2$ ,  
 $y := (a - b)/2$ . Pak  $a = x + y$ ,  $b = x - y$  a užijeme vzorce 1.
- další užitečné vzorce:  
 $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$   
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$   
 $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$   
 $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- základní limita pro cos:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Věta D.** Existuje funkce  $\ln(x)$  z  $(0, \infty)$  do  $\mathbb{R}$  taková, že

1.  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  pro  $\forall x, y \in (0, \infty)$ ;
2.  $\ln(x)$  je rostoucí a spojitá na  $(0, \infty)$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .  
 Funkce  $\ln(x)$  je těmito vlastnostmi jednoznačně určena.

Z 1–3 plynou další vlastnosti funkce  $\ln(x)$ :

- $\ln 1 = 0$ , neboť  $\ln 1 = \ln(1 \cdot 1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$ , neboť  $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$  pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k) \ln(x)$  pro  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$ , neboť  $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k \ln(\sqrt[k]{x})$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ . Chceme ukázat, že

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(\infty, \delta) \implies \ln x > K].$$

Nechť  $K > 0$  je dáno: protože  $\ln(x)$  je rostoucí, je  $\ln 2 > \ln 1 = 0$  a tedy existuje  $n \in \mathbb{N}$  tak, že  $n \ln 2 > K$ . Položme  $\delta = 1/2^n$ .

Potom  $x \in P(\infty, \delta) \implies x > 2^n \implies \ln x > n \ln 2 > K$ .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} = -\infty$ , neboť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(1/y) = \lim_{y \rightarrow \infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$

- $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$ . Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

**Věta E.** Existuje funkce  $\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  taková, že platí:

1.  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  pro  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\exp(x)$  je spojitá a rostoucí v  $\mathbb{R}$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ .

Funkce  $\exp(x)$  je navíc vlastnostmi 1–3 jednoznačně určena.

Samozřejmě funkce  $\ln x$  a  $\exp x$  jsou vzájemně inverzní. Větu E můžeme také dokázat z Věty D tak, že položíme  $\exp = (\ln)_{-1}$  – všechny vlastnosti  $\exp(x)$  pak plynou z vlastností  $\ln(x)$  a z toho, že jde o funkce vzájemně inverzní:

- $\exp(x)$  je rostoucí, neboť  $\ln(x)$  je rostoucí
- $\exp(x)$  zobrazuje  $\mathbb{R}$  vzájemně jednoznačně na  $(0, \infty)$
- vlastnost 1 plyne z vlastnosti 1 funkce  $\ln(x)$ , Věta D
- limita sub 3 plyne ze základní limity pro  $\ln(x)$  (vlastnost 3 ve Větě D) a ze spojitosti funkce  $\exp(x)$

Funkce  $\exp(x)$  má tyto další vlastnosti (dokažte sami):

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$  pro  $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

**Definice.** (Obecná mocnina.) Pro  $x > 0, a \in \mathbb{R}$  definuji  $x^a = \exp(a \ln x)$ . Dále definuji  $x^0 = 1$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , speciálně též  $0^0 = 1$ .

**Poznámky.** Jak chápeme symbol  $x^a$ ?

- pro  $a = n \in \mathbb{N}$  je  $x^a = x \cdot x \dots x$  (násobeno n-krát)
- pro  $-a = n \in \mathbb{N}$  je  $x^a = 1/x^{-a}$  a užiři předchozí definice
- $x^0 = 1$
- pokud  $a \notin \mathbb{Z}$ , nezbyvá než použít definici  $x^a = \exp(a \ln x)$  (která ovšem pro  $a \in \mathbb{Z}$  dává stejný výsledek jako tři předchozí)

Symbol  $\sqrt[n]{x}$  má zvláštní význam, určený Větou B.

Rozdíly a souvislosti: pokud  $x > 0$ , platí všechno tak, jak očekáváme:  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, (x^a)^b = x^{ab}$  atd.

Pokud ovšem  $x < 0$ , objeví se rozdíly:  $\sqrt[3]{-1} = 1$ , avšak  $(-1)^{\frac{1}{3}}$  není definováno. Podobně  $[(-1)^2]^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$ , avšak  $(-1)^{2\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$  není definováno.

**Definice.** (Další elementární funkce.)

- ①  $\arcsin = (\sin |_{[-\pi/2, \pi/2]})_{-1}$
- ②  $\arccos = (\cos |_{[0, \pi]})_{-1}$
- ③  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ④  $\operatorname{arctg} x = (\operatorname{tg}_{(-\pi/2, \pi/2)})_{-1}$
- ⑤  $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq k\pi$

**Definice.** Funkce se nazve (na daném definičním oboru) elementární, jestliže je to:

- (1) polynom, racionální funkce, odmocnina
- (2)  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ ,  $\ln$
- (3)  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\operatorname{arctg}$
- (4) jakákoliv další funkce, která vznikne z předchozích konečným opakováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

**Poznámky.**

- funkce  $\sinh x = \frac{1}{2}(\exp x - \exp(-x))$  (hyperbolický sinus) je zjevně elementární. Funkce k ní inverzní (zvaná  $\operatorname{argsinh}$ ) ovšem také, protože  $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$
- ve skutečnosti se všechny elementární funkce dají vytvořit pomocí  $\exp$  a  $\ln$ , pokud povolíme komplexní argumenty: např.  $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$ ,  $\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2})$ .
- příklad funkce, která není elementární (na žádném intervalu): Dirichletova funkce