4. Derivace

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Značíme $f'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'|_{x=x_0}$.

Terminologie: pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, jde o derivaci vlastní (konečnou), pro $f'(x_0) = \pm\infty$ je derivace nevlastní.

Poznámky. • ekvivalentní definice derivace:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• $f(x) = g(x)$ na jistém $U(x_0)$ implikuje $f'(x_0) = g'(x_0)$
• geometrický význam: směrnice tečny grafu funkce
• derivováním vznikne z funkce $f(x)$ nová funkce $f'(x)$, která má dovoleno nabývat i hodnot $\pm\infty$

Příklady. ① $c' = 0$
② $\big(x^n\big)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
③ $\big(1/x^n\big)' = -n/x^{n+1}$ pro $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$
④ $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$
⑤ $(\ln x)' = 1/x$ pro $x > 0$
⑥ $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$
⑦ $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$.) Pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

respektive

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva.)

Značíme $f'_+(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_+|_{x=x_0}$ respektive $f'_-(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_-|_{x=x_0}$
Opět rozlišujeme vlastní a nevlastní derivaci.

Poznámky. • ekvivalentní definice jednostranných derivací:

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{respektive} \qquad \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• z Věty 2.2 plyne ekvivalence následujících tvrzení:
(1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A
(2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se A

Příklady.
① $|x|' = \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$; derivace v 0 neexistuje, neboť $(|x|)'_\pm|_{x=0} = \pm 1$
② $\big(\sqrt{x}\big)'_+|_{x=0} = \infty$

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

Poznámky. • důležité je "vlastní" - $\operatorname{sgn}(x)$ má v 0 derivaci (rovnou ∞), ale není tam spojitá
• platí jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci zprava (zleva) $\Longrightarrow$ $f(x)$ je v x_0 spojitá zprava (zleva)
• obrácená implikace zdaleka neplatí: např. $|x|$ je spojitá v 0, ale nemá tam derivaci. Lze dokonce sestrojit funkci, která je spojitá všude, ale derivaci (ani jednostrannou) nemá nikde

Věta 4.2. Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0. Potom
(1) $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $\big(f-g\big)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
(3) $\big(fg\big)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(4) jestliže $g(x_0) \neq 0$, pak $\big(\frac{f}{g}\big)'(x_0) = \frac{1}{[g(x_0)]^2}\big\{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\big\}$

Poznámky. • platí pro jednostranné derivace
• lze použít na vícenásobné součty, součiny atd.; např. $\big(fgh\big)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$
• v případě nevlastních derivací nemusí platí, třebaže má pravá strana smysl: polož $f(x) = 1/x$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 1$. Potom $f'(0) = \infty$, a tedy u vzorce

$$\big(f \cdot f\big)'(0) = f(0)f'(0) + f(0)f'(0)$$

je pravá strana ∞, avšak derivace funkce $f \cdot f$ v bodě 0 neexistuje

Příklady.
① $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
② $\big(e^x \sin x\big)' = e^x(\cos x - \sin x)$

Lemma 4.1. Nechť $f(x_0) \neq 0$ (může být i nevlastní). Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Věta 4.3. (Derivace složené funkce.) Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci v x_0, nechť $g(y)$ má vlastní derivaci v bodě $f(x_0)$. Potom

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

Příklady.

① $\big[\cos(x^2)\big]' = -\sin(x^2)\cdot 2x,\ x\in\mathbb{R}$

② $\big(\sqrt{x^2+1}\big)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$

③ $\big[f(ax+b)\big]' = af'(ax+b)$ pro každé x takové, že $f'(y)$ má v bodě $ax+b$ derivaci

④ $\big\{x^x\big\}' = x^x(1+\ln x),\ x>0$

⑤ $|f(x)|' = f'(x)\operatorname{sgn}\big\{f(x)\big\}$, pokud $f(x)\neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní

Věta 4.4. (Derivace inverzní funkce.) Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval, nechť $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v $\mathbb{R}$. Označ $J=f(I)$, a $\varphi(y): J\to I$ je funkce inverzní k $f(x)$. Nechť $y_0\in J$ je vnitřní bod. Potom:

(1) Jestliže $f'(\varphi(y_0))\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pak $\varphi(y_0) = \dfrac{1}{f'(\varphi(y_0))}$.

(2) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = \pm\infty$, pak $\varphi'(y_0)=0$.

(3) Jestliže $f'(\varphi(y_0)) = 0$, pak $\varphi(y_0)=\infty$ pokud $f(x)$ je rostoucí, a $\varphi(y_0)=-\infty$ pokud $f(x)$ je klesající.

Příklady. ① $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y\in(-1,1)$

② $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2},\ y\in\mathbb{R}$

③ Pokud $n\geq 2$ je sudé, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ y>0$

Pokud $n\geq 3$ je liché, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pro $y\neq 0$, a $\big(\sqrt[n]{y}\big)'|_{y=0}=\infty$.