7. Posloupnosti.

Definice. Posloupnost je zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž místo $a(n)$ píšeme a_n. Celou posloupnost značíme $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nebo krátce $\{a_n\}$.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = \frac{n^n}{n!}$ …
② posloupnost zadaná rekurentně: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies a_n \in U(a, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Terminologie: pokud posloupnost má konečnou (vlastní) limitu, říkáme, že konverguje. Pokud $a_n \to \pm\infty$, říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje do $\pm\infty$. Pokud a_n nemá limitu, říkáme, že osciluje.

Poznámky. • $a_n \to a \in \mathbb{R}$ lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon\big] .$$

Pokud $a_n \to \infty$, je to totéž jako

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies a_n > K\big] .$$

• velice užitečné je následující pozorování: $a_n \to a$ právě když platí: pro každé $\varepsilon > 0$ pevné je $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně výjimek.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.
② $b_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Poznámky. Platí:
(i) Jestliže $a_n \to a$, $b_n \to b$, pak

$$a_n + b_n \to a + b$$
$$a_n b_n \to ab$$
$$a_n / b_n \to a/b$$

má-li výraz napravo smysl (srovnej Věty 2.3, 2.7.)

(ii) Jestliže $\alpha \leq a_n \leq \beta$ pro $\forall n$, a platí $a_n \to a$, je také $\alpha \leq a \leq \beta$. Srovnej s Větou 2.9.

(iii) Je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ pro $\forall n$, a platí $b_n \to a$, $c_n \to a$, je také $a_n \to a$. Viz Věta 2.10 ("o dvou policajtech").

(iv) Jestliže $a_n \to 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, je $a_n b_n \to 0$. Srovnej s Větou 2.4.

Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazve omezená, jestliže $\exists K > 0$ tak, že $|a_n| \leq K$ pro $\forall n$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající), platí-li $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}$ resp. $a_n \geq a_{n+1}$ resp. $a_n > a_{n+1}$) pro $\forall n$.

Věta 7.1. Konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Potom $\{a_n\}$ má limitu. Je-li navíc omezená, pak konverguje (tj. má konečnou limitu.)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ pevné nastává $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n.

Poznámky. • $a_n = (-1)^n$ má dva hromadné body: 1 a -1.
• $b_n = \sin n$ ... dá se ukázat, že hromadné body tvoří interval $[-1, 1]$.
• jestliže $a_n \to a$, tak a je hromadný bod, a je to jediný hromadný bod.

Definice. Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Řekneme, že $\{b_n\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$ (neboli posloupnost vybraná z $\{a_n\}$), existuje-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

Věta 7.3. Číslo a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, právě když z $\{a_n\}$ lze vybrat podposloupnost, jejíž limita je a.

Věta 7.4. (Bolzano-Weierstrassova.) Nechť $\{a_n\}$ je omezená. Potom $\{a_n\}$ má konvergentní podposloupnost.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon\big] .$$

Věta 7.5. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.
(2) posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

Poznámka. Někdy je pro nás podstatné, zda posloupnost konverguje nebo nekonverguje, zatímco konkrétní hodnota limity nás nezajímá. A v tom je užitečnost B.C. podmínky: umí rozhodnout, zda posloupnost konverguje, aniž hovoří o její limitě.

Věta 7.6. (Heineho.) Nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Poznámka. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P_+(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_n > x_0$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Věta 7.6. Nechť $f(x)$ je definována v intervalu I. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v I.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_0 \in I$, $x_n \in I$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Poznámka. Podobně platí: $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, právě když pro každou posloupnost, splňující $x_n \to x_0$, platí, že $f(x_n) \to f(x_0)$.

Příklady. ① Důležitá limita:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

② Neexistující limita:

$$\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}\,.$$

③ Rekurentně zadaná posloupnost $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ má limitu 2.