7. Aproximace funkcí polynomy.

Definice. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány na nějakém $P(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je "malé ó $g(x)$" pro $x \to x_0$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Značíme: $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

Řekneme, že $f(x)$ je "velké ó $g(x)$" pro $x \to x_0$, jestliže existují $C > 0$, $\delta > 0$ tak, že

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \qquad \forall x \in P(x_0, \delta)\,.$$

Značíme: $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Řekneme, že $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \to x_0$, jestliže limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existuje a je konečná a nenulová. Značíme: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Poznámky. Názorně:
$f(x) = o(g(x))$ ... $f(x)$ je mnohem menší než $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$ ... $f(x)$ je nejvýše jako konstanta krát $g(x)$
$f(x) \sim g(x)$ ... $f(x)$, $g(x)$ se chovají v zásadě stejně.

Příklady. ① $\ln x = o(\sqrt{x})$, $x \to \infty$.
② $\frac{\sin x}{x^2+1} = O(\frac{1}{x^2})$, $x \to \infty$.
③ $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2$, $\ln(1+x) \sim x$, vše pro $x \to 0$.

Definice. Funkce $f(x)$ je dána. Potom k-tou derivaci $f(x)$ značíme $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ a definujeme jí induktivně takto:
(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$, neboli funkci považujeme za nultou derivaci sebe sama;
(ii) $f^{(k+1)} = \left\{ f^{(k)}(x) \right\}'$, speciálně $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ atd.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že $f(x)$ je třídy C^n na I, jestliže derivace $f^{(k)}(x)$ existují a jsou spojité na I pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$. Značíme $f(x) \in C^n(I)$. Speciálně, $C^0(I) = C(I)$ je množina všech funkcí spojitých na I.

Symbolem $C^\infty(I)$ značíme třídu funkcí, pro něž derivace všech řádů existují a jsou spojité na I.

Poznámka. Idea aproximace funkce polynomem spočívá v následujícím: je dána funkce $f(x)$ na okolí bodu x_0. Sestrojíme polynom $p(x)$ tak, že

$p(x_0) = f(x_0)$
$p'(x_0) = f'(x_0)$
$\vdots$
$p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Ukazuje se, že $p(x)$ funkci v blízkosti bodu x_0 dobře aproximuje - tím lépe, čím je větší n.

Např. funkce $f(x) = \cos(x)$ v blízkosti bodu 0. Máme $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Stejnou hodnotu, první a druhou derivaci v nule má polynom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, který také funkci $\cos x$ blízko počátku - jak vidno z grafu - dobře aproximuje.

Lemma 8.1. Pro x_0 pevné a $k \geq 0$ celé definujeme

$$Q_k(x) = \frac{1}{k!}(x - x_0)^k .$$

Speciálně $Q_0(x) = 1$ (díky úmluvě $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$), $Q_1(x) = x - x_0$, $Q_2(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \ldots$.

Platí:

(1) $Q_k(x)$ je polynom stupně k
(2) $Q_0'(x) = 0$ a $Q_k'(x) = Q_{k-1}(x)$ pro $\forall k \geq 1$
(3) $Q^{(l)}(x_0)$ je rovno 1 pro $k = l$, zatímco pro $k \neq l$ je to 0

Definice. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom výraz

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ o středu x_0. Značíme $T^f_{x_0,n}(x)$.

Věta 8.1. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom

$$f(x) - T^f_{x_0,n}(x) = o\big((x - x_0)^n\big) , \qquad x \to x_0 . \qquad (*)$$

Navíc $T^f_{x_0,n}(x)$ je jediný polynom stupně $\leq n$, který má vlastnost (*).

Příklady. ① $T^{\exp x}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Tedy

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) , \quad x \to 0 .$$

② $T^{\sin x}_{0,2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, neboli

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\,, \quad x \to 0\,.$$

③ $f(x) = (1+x)^a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je pevné. Potom

$$T^{f(x)}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k\,.$$

Tedy

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\,, \quad x \to 0\,.$$

Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$ celé definujeme zobecněné kombinační číslo jako

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & k \geq 1 \end{cases}$$

Pro $n \geq k \geq 0$ celá čísla je to ve shodě s původní definicí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Taylorův rozvoj $(1+x)^a$ můžeme elegantně napsat jako

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n)\,.$$

Všimněte si analogie s binomickou formulí.

Věta 8.2. Nechť $F(x)$ je třídy C^{n+1} na otevřeném intervalu I, a $x_0 \in I$ je pevné. Nechť $f(x) = F'(x)$ v I. Potom

(1)

$$\left\{T^F_{x_0,n+1}(x)\right\}' = T^f_{x_0,n}(x)\,.$$

(2) Naopak: buď $p(x) = T^f_{x_0,n}(x)$, a $P(x) = \int f(x)\,dx$. Potom při vhodné volbě $c \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) + c = T^F_{x_0,n+1}(x)\,.$$

Příklady. ①

$$T^{\cos x}_{0,2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

②

$$T_{0,n}^{\ln(1+x)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Věta 8.3. 1. Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, kde $m \geq n$. Potom $f(x) + g(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$.

2. Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$. Potom $f(x)g(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.

3. Nechť $f(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$. Potom $x^m f(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.

4. Nechť $f(x) = o(x^n)$ a nechť $g(x) \sim x^m$ pro $x \to 0$, kde $m \geq 1$. Potom $f(g(x)) = o(x^{mn})$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Stručně můžeme předchozí pravidla vyjádřit takto:
$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ pokud $m \geq n$
$o(x^n)o(x^m) = o(x^{m+n})$
$x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$
Všimněte si, že $o(x^n) - o(x^n)$ se rovná $o(x^n)$ (a ne tedy 0). To chápeme takto: rozdíl dvou funkcí, které obě jsou malé ó x^n je opět nějaká funkce, která je malé ó x^n.

Příklady. ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

②

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\right) = \frac{1}{2}$$

Definice. Nechť $f(x) \in C^n(I)$, kde I je otevřený interval a $x_0 \in I$ je pevné. Funkce

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_{x_0,n}^{f}(x)$$

se nazývá Taylorův zbytek funkce po n-tém členu.

Poznámka. Z předchozího víme, že $R_{n+1}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ pro $x \to x_0$, tj. $R_{n+1}(x)$ je malé, pokud x je blízko x_0.

Nyní nás zajímá jiný problém - totiž zda také $R_{n+1}(x) \to 0$, pokud x je pevné, zatímco n se zvětšuje.

Věta 8.4. Nechť $f(x) \in C^{n+1}(I)$, kde I je otevřený interval a x_0, $x \in I$, $x_0 \neq x$ jsou zvolena pevně. Potom ostře mezi x, x_0 existuje θ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Výraz napravo se nazývá Lagrangeův tvar zbytku.

Lemma 8.2. Nechť $M > 0$ je pevné. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0\,.$$

Příklady.
① Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pevné je

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} T_{0,n}^{\exp x}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

② Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pevné je

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

____(nepovinná část)

Poznámka. Místo $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}$ se zavádí symbol $\sum_{k=0}^{\infty}$.

Lemma 8.3. Nechť $|q| < 1$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

Lemma 8.4. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \frac{1}{n!n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

Důsledek. Číslo e je iracionální.