9. Určitý integrál.

Motivace. Studujeme následující problém: je dána funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a my chceme najít číslo, které vyjadřuje plochu pod jejím grafem. Tato hodnota se nazývá určitý integrál (funkce f od a do b), značí se

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Existuje řada způsobů, jak definovat integrál. Ty se neliší hodnotou výsledku; spíše třídou funkcí, které se jimi dají integrovat.

Stručně probereme dva přístupy: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Ukážeme, že pro spojité funkce dávají stejné výsledky.

Definice. Je-li dána $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka PF) k $f(x)$ v (a, b), pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b). Má-li výraz

$$F(b-) - F(a+) = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky. • je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

• situace, kdy $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b), a nechť $F(x)$ je PF k $f(x)$ v (a, b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$

② $(\mathcal{N})\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$

③ $(\mathcal{N})\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathcal{N}(a,b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a,b)$.

Lemma 9.1. (1) Nechť $\phi(x)$ je spojitá v intervalu I, nechť $\phi'(x)=0$ pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c\in\mathbb{R}$ tak, že $\phi(x)=c$ pro $\forall x\in I$.

(2) Nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu I, nechť $F'(x)$, $G'(x)$ existují, jsou konečné a rovnají se pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c\in\mathbb{R}$ tak, že $F(x)=G(x)+c$ pro $\forall x\in I$.

Věta 9.1. Nechť $f(x)$ je definována v (a,b), nechť $F(x)$, $G(x)$ jsou PF k $f(x)$ v (a,b). Potom

$$\big[F(x)\big]_a^b=\big[G(x)\big]_a^b\,.$$

Rovnost chápeme takto: má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Důsledek. Definice Newtonova integrálu je korektní.

Věta 9.2. [Linearita N.i.] Nechť $f(x)$, $g(x)\in\mathcal{N}(a,b)$. Nechť α, $\beta\in\mathbb{R}$. Potom též $\alpha f(x)+\beta g(x)\in\mathcal{N}(a,b)$ a

$$(\mathcal{N})\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx=\alpha(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx+\beta(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Věta 9.3. [Vztah N.i. a nerovnosti.] (1) Nechť $f(x)\in\mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x)\geq 0$ pro $\forall x\in(a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\geq 0\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $g(x)\in\mathcal{N}(a,b)$ a nechť $f(x)\geq g(x)$ pro $\forall x\in(a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\geq(\mathcal{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(3) Nechť $f(x)$, $|f(x)|\in\mathcal{N}(a,b)$. Potom

$$\Big|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\Big|\leq(\mathcal{N})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

(4) Nechť $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a nechť $|f(x)| \le c$ pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$\big|(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx\big| \le c(b-a)\,.$$

Věta 9.4. [Per-partes pro N.i.] Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivaci pro $\forall x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - (\mathcal{N})\int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,,$$

jestliže výrazy napravo mají smysl a jsou konečné.

Věta 9.5. [Substituce pro N.i.] Nechť $f(x)$ je definována v (a,b). Nechť $\phi(t) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná funkce taková, že buď (i) $\phi(t)$ je rostoucí a $\phi'(t) > 0$, nebo (ii) $\phi(t)$ je klesající a $\phi'(t) < 0$. Potom

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)|\phi'(t)|\,dt\,.$$

Rovnost chápeme takto: má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Dodatek k definici N.i. Pro $a > b$ definujeme

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = -(\mathcal{N})\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

má-li pravá strana smysl. Dále klademe

$$(\mathcal{N})\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Poznámka. Je-li ve Větě 9.5. dokonce $\phi(t) : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{N})\int_{\phi_{-1}(a)}^{\phi_{-1}(b)} f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt = \pm(\mathcal{N})\int_\alpha^\beta f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt\,,$$

kde $\pm$ odpovídá případu $\phi(t)$ rostoucí/klesající.

Definice. Dělením D intervalu $[a,b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, kde $x_0 = a$, $x_n = b$.

Je-li $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce, definujeme pro $i = 1 \dots n$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i])\,, \qquad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])\,.$$

Čísla

$$s(D) = s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i-1} - x_i)$$
$$S(D) = S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i-1} - x_i)$$

nazýváme dolní resp. horní Riemannův součet funkce $f(x)$, příslušný dělení D.

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom supremum množiny

$$\big\{s(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\big\}$$

se nazývá dolní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Naproti tomu infimum množiny

$$\big\{S(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\big\}$$

se nazývá horní Riemannův integrál $f(x)$ od a do b a značí se

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx\,.$$

Definice. Řekneme, že dělení $\tilde{D}$ je zjemněním dělení D, pokud $\tilde{D}$ obsahuje všechny body D. Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma 9.2. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. (1) Jsou-li D, $\tilde{D}$ dělení intervalu $[a,b]$ a $D \subset \tilde{D}$, je $s(D) \le s(\tilde{D})$ a $S(D) \ge S(\tilde{D})$.
(2) Jsou-li D_1, D_2 libovolná dělení intervalu $[a,b]$, je $s(D_1) \le S(D_2)$.

Věta 9.6. Nechť $m \le f(x) \le M$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

$$m(b-a) \le (\mathcal{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le (\mathcal{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \le M(b-a)\,.$$

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Jestliže

$$(\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,,$$

pak toto číslo se nazývá Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b. Značí se

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a,b]$, píšeme $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Příklady. ① $(\mathcal{R})\int_0^1 x\,dx = 1/2$.

Poznámky. Lze dokázat (nebudeme dělat):
(1) Jsou-li $f(x)$, $g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, je také $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \cdot (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(2) Pokud $f(x) \le g(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$, tak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \le (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(3)

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (\mathcal{R})\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx\,.$$

(4) Pokud $|f(x)| \le c$ pro $\forall x \in [a,b]$, tak

$$\left|(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \le c(b-a)\,.$$

Věta 9.7.[Intervalová aditivita pro R.i.] (1) Nechť $f(x)$ je omezená v $[a,b]$, nechť $c \in (a,b)$. Potom

$$(\mathcal{R})\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\underline{\int_c^b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$
$$(\mathcal{R})\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + (\mathcal{R})\overline{\int_c^b} f(x)\,dx = (\mathcal{R})\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

(2) Nechť $c \in (a,b)$ a nechť $f(x) \in \mathcal{R}(a,c)$, $f(x) \in \mathcal{R}(c,b)$. Potom též $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$ a platí

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dodatek k definici R.i. Pro $b < a$ definujeme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx := -(\mathcal{R})\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Dále klademe $(\mathcal{R})\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Poznámka. S výše uvedeným dodatkem platí Věta 9.7. v tomto obecnějším tvaru: je-li $f(x) \in \mathcal{R}(\alpha,\beta)$, a čísla a, b, $c \in [\alpha,\beta]$ jsou libovolná, pak platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Lemma 9.3. [Postačující podmínka existence R.i.] Nechť $f(x)$ je omezená v $[a,b]$ a nechť platí:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists \text{ dělení } D\big)\Big[S(D) - s(D) < \varepsilon\Big]\,.$$

Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Lemma 9.4. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x,y \in [a,b]\big)\Big[|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big]\,.$$

Poznámka. Vlastnost v předchozím lemmatu se nazývá *stejnoměrná pojitost*; je o něco silnější než obyčejná spojitost v intervalu.

Věta 9.8. Nechť $f(x)$ je spojitá na $[a,b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Věta 9.9. Nechť $f(x)$ je omezená, monotónní v $[a,b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$.

Věta 9.10. [R.i. s proměnnou horní mezí.] Nechť $f(x) \in \mathcal{R}(a,b)$ a $c \in [a,b]$ je pevné. Definuji funkci

$$F(x) := (\mathcal{R})\int_c^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in [a,b]\,.$$

Potom:

(1) $F(x)$ je spojitá v $[a,b]$.

(2) $F'(x_0) = f(x_0)$ platí pro každé $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je $f(x)$ spojitá.

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá v (a,b). Potom $f(x)$ má v (a,b) primitivní funkci.

Důsledek. Otázka "má daná $f(x)$ primitivní funkci?" má dva aspekty.

- čistě teoreticky, odpověd̆ je ANO, pokud $f(x)$ je spojitá, (viz výše). Také víme, že odpověd̆ je NE, pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost (díky Větě 6.7.)

- z praktického hlediska zní otázka malinko jinak: dokáži danou PF napsat vzorečkem (tj. vyjářit pomocí elementárních funkcí)? A to zdaleka vždy nejde.

Často uváděný příklad: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ určitě má PF (je spojitá), ale dá se dokázat, že tato primitivní funkce se nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta 9.11. [Vztah N.i. a R.i.] Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a,b]$. Potom $f(x) \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Poznámky. K názornému významu integrálu: lze provést asi následující úvahu. Je-li dána funkce $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$, a jestliže číslo $P \in \mathbb{R}$ vyjadřuje "plochu pod grafem $f(x)$", pak nutně $P = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$.

Podobně lze odvodit řadu dalších vzorečků pro výpočet délky křivky, objemu/povrchu rotačního tělesa, souřadnic těžiště atd.

Poznámky.

Newtonův integrál - výhody: snadný výpočet z definice, umí i neomezené funkce/intervaly; nevýhody: spočívá na složitém pojmu (primitivní funkce), názorný význam není vůbec jasný

Riemannův integrál - výhody: elementární definice (supremum, infimum), názorný význam snadno zdůvodnitelný; nevýhody: takřka nelze spočítat z definice, funguje jen na omezených funkcích a intervalech

Klíčové je, že pro spojité funkce dávají oba typy integrálu stejný výsledek.