Příklad 1. [6 bodů]

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin x \ln(1+x^2)}$$

Rozšíříme

$$\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin x \ln(1+x^2)} \cdot \frac{\sqrt{\cos x}+1}{\sqrt{\cos x}+1} = \frac{\cos x - 1}{\sin x \ln(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}\,.$$

[1 bod]

Vkládáme x tak, aby vznikly známé limity:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} \cdot \frac{1}{(-x)}$$

Víme, že

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{x}{\sin x} \to 1\,.$$

[1 bod]

Dále

$$\frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \to 1$$

- podle věty o limitě složené funkce: $\frac{y}{\ln(1+y)} \to 1$ pro $y \to 0$, a $x^2 \to 0$, přitom $x^2 \neq 0$ pro $x \in P_-(0)$.

[2 body]

Dále

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1} \to \frac{1}{2}$$

ze spojitosti $\sqrt{y}$ a $\cos x$.

[1 bod]

A konečně pro $x \to 0-$

$$\frac{1}{(-x)} \to \infty\,,$$

podle věty X, neboť jmenovatel jde k nule, přitom je kladný na $P_-(0)$.

[1 bod]

Podle věty o aritmetice limit je výsledek

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty\,.$$

Příklad 2. [4 body]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{\exp(1/x)-1}}$$

Podle věty Y můžeme ekvivalentně počítat

$$\lim_{y\to 0+}\left(\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}\right)^{\frac{1}{\exp(y)-1}} = \lim_{y\to 0+}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{\exp(y)-1}} .$$

[1 bod]

Protože na y závisí exponent i základ, přepíšeme pomocí definice obecné mocniny:

$$\lim_{y\to 0+}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{\frac{1}{\exp(y)-1}} = \lim_{y\to 0+}\exp\left\{-\frac{\ln(1+y)}{\exp y-1}\right\} .$$

Stačí tedy najít pro $y\to 0+$ limitu funkce

$$h(y) = -\frac{\ln(1+y)}{\exp y - 1} .$$

[1 bod]

Ovšem

$$h(y) = -\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\frac{y}{\exp y - 1} \to -1$$

podle známých limit.

[1 bod]

Výsledek je tedy $\exp(-1) = 1/e$ díky spojitosti $\exp x$.

[1 bod]