

POŽADAVKY KE ZKOUŠCE MAF033  
ZS 2005/06, Dalibor Pražák

**1. Úvod. Reálná čísla.**

- absolutní hodnota, trojúhelníková nerovnost
- \* zavedení odmocniny
- existence iracionálních čísel
- každý interval obsahuje iracionální čísla
- maximum a minimum, supremum a infimum množiny
- věta o existenci suprema (bez důkazu)
- komplexní čísla
- rozšířená reálná čísla a jejich početní pravidla

**2. Reálné funkce. Limita a spojitost.**

- funkce prostá, vzájemně jednoznačná, složená, inverzní
- funkce sudá, lichá, periodická, monotónní
- obraz a vzor množiny
- okolí bodů kruhové, prstencové, levé, pravé
- Hausdorffův princip oddělení
- limita funkce v bodě
- jednostranné limity a jejich vztah k oboustranné
- funkce omezená na množině
- funkce s konečnou limitou je omezená na jistém (prstencovém) okolí, funkce s nenulovou limitou je odražená od nuly na jistém (prstencovém) okolí
- věta o aritmetice limit - vlastní a \* obecná verze

- funkce omezená krát jdoucí k nule jde k nule
- spojitost funkce v bodě
- vztah limity a spojitosti
- příklady: odmocnina, polynom, racionální funkce, Dirichletova funkce
- limita složené funkce
- limita typu  $1/f(x)$ , kde  $f(x) \rightarrow 0$  a je kladná/záporná na okolí bodu
- zachování nerovnosti v limitě
- věta "o dvou policajtech"
- monotónní funkce má vždy jednostrannou limitu
- jednostranná spojitost, její vztah k jednostranné limitě a k oboustranné spojitosti
- spojitost funkce na intervalu
- vnitřní a krajní body intervalu
- \* ekvivalentní vyjádření spojitosti v intervalu pomocí (jednostranné) spojitosti v každém bodě
- spojitost součtu, součinu, rozdílu, podílu spojitých funkcí
- spojitost složené funkce
- \* Darbouxova věta - nabývání mezihodnoty pro spojitou funkci
- charakterizace intervalu, spojitý obraz intervalu je interval
- \* existence a spojitost inverzní funkce
- důsledek: důkaz existence odmocniny
- převedení limity v  $\pm\infty$  na limitu  $0\pm$
- poznámky o limitě a spojitosti komplexních funkcí

#### 4. Derivace.

- derivace funkce v bodě
- jednostranné derivace a jejich vztah k oboustranné derivaci
- vztah spojitosti a derivace
- derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu
- \* derivace složené funkce
- derivace inverzní funkce

#### 5. Primitivní funkce.

- primitivní funkce
- linearita integrálu
- integrování per-partes
- první a \* druhá věta o substituci
- rozklad polynomů, rozklad na parciální zlomky (bez důkazu)
- poznámky k integrování a derivování komplexních funkcí

#### 6. Hlubší vlastnosti derivace.

- \* plíživé lemma
- funkce spojitá v bodě je omezená na jistém kruhovém okolí
- \* funkce spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu je na něm omezená
- (lokální) extrém funkce na intervalu
- vztah mezi extrémem a nulovostí derivace
- funkce spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu v něm má maximum i minimum

- věty o střední hodnotě: Rolleova, Lagrangeova, \* Cauchyho
- výpočet derivace jako limity derivace
- lemma o napojení primitivní funkce
- \* Darbouxova vlastnost; derivace spojité funkce má Darbouxovu vlastnost
- \* l'Hospitalovo pravidlo (důkaz některých případů)
- vztah monotonie a znaménka derivace
- konvexita, konkávnost - definice, ekvivalentní vyjádření
- vztah konvexity a monotonie derivace resp. znaménka druhé derivace
- inflexní bod

## 7. Posloupnosti.

- posloupnost
- limita posloupnosti
- posloupnost omezená, monotónní, konvergentní
- aritmetika limit, zachování nerovnosti v limitě, věta o dvou políčkách pro posloupnosti (bez důkazu)
- konvergentní posloupnost je omezená
- monotónní posloupnost má limitu
- hromadný bod posloupnosti
- podposloupnost neboli posloupnost vybraná
- charakterizace hromadného bodu pomocí vybrané posloupnosti
- Bolzano-Weierstrassova věta: omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost
- Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence

- \* posloupnost konverguje, právě když splňuje B.C. podmínku
- Heineho charakterizace limity funkce v bodě, spojitosti funkce na intervalu

## 8. Aproximace funkcí polynomy.

- malé  $\delta$ , velké  $\epsilon$ , řádová rovnost
- derivace  $k$ -tého řádu, funkce třídy  $C^k$  a  $C^\infty$
- Taylorův polynom funkce v bodě a jeho aproximační vlastnost
- zobecněné kombinační číslo
- derivování a integrování Taylorova polynomu
- početní pravidla pro malé  $\delta$
- \* odhad zbytku Taylorova polynomu v Lagrangeově tvaru

## 9. Určitý integrál.

- zobecněný přírůstek funkce
- definice Newtonova integrálu
- funkce se stejnou derivací se liší o konstantu
- linearita Newtonova integrálu
- Newtonův integrál a nerovnost
- per-partes pro Newtonův integrál
- substituce pro Newtonův integrál
- dělení intervalu, horní a dolní Riemannův součet
- definice Riemannova integrálu
- zjemnění dělení, vztah horního a dolního integrálu

- linearita, vztah k nerovnosti pro R.i. (bez důkazu)
- intervalová aditivita pro R.i.
- postačující podmínka existence R.i.
- \* stejnoměrná spojitost funkce na omezeném, uzavřeném intervalu
- spojitá funkce má Riemannův integrál
- omezená, monotónní funkce má Riemannův integrál
- Riemannův integrál s proměnnou horní mezí
- důsledek: každá spojitá funkce má primitivní funkci
- vztah Riemannova a Newtonova integrálu

---

\* těžší věta

klíčový pojem