11. Mocninné řady.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \qquad (1)\,.$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z. Předpokládáme c_k, z_0, $z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$.

Poznámky.
• mocninná řada ... zobecněný polynom
• mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (1). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že
(i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (1) konverguje absolutně;
(ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (1) diverguje.

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R, které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 11.2. Je dána řada (1). Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Věta 11.3. Je dána řada (1). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Poznámka. Hlavním cílem kapitoly je dokázat rovnost:

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}\,.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu $\sum$ a $'$.

Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z-z_0)^k\,, \qquad\qquad \tilde{c}_k = (k+1)c_{k+1}\,.$$

Lemma 11.1. Řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady (3) $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, (4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako (1).
Heslo: formálním derivováním/integrováním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 11.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R>0$. Označme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\,, \qquad\qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}\,.$$

Potom $F'(z) = f(z)$ pro $\forall z \in U$, kde $U = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < R\big\}$.

Poznámky.
• funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z \in U$ korektně definovány, nebo dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)
• tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 < |h| < \delta,\ h \in \mathbb{C} \implies \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\Big]\,,$$

kde $z \in U$ je libovolné.
• speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x) = f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R,R)$, neboli

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 \neq h \in (\delta,\delta) \implies \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\Big]\,.$$

Důsledky. (Věty 11.4.)
• funkce $F(z)$ je v množině U nekonečně diferencovatelná a platí $F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k(z-z_0)^{k-3}$ atd.

• funkce $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$ v množině U, tj. $\Phi'(z) = F(z)$ pro $\forall z \in U$.

Příklad. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z) = E(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Věta 11.5. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$ její součet. Potom $F^{(k)}(z_0) = k!\, c_k$ pro $\forall l = 0, 1, \ldots$.

Důsledek. Nechť řada (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence, a $F(z)$ je její součet. Potom n-tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n-tému částečnému součtu řady (1).

Věta 11.6. Nechť řady (1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Označme $F(z)$, $\tilde{F}(z)$ jejich součty. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots$.

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \ldots$.

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť p, $\tilde{p}$ jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x. Potom p, $\tilde{p}$ jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

Věta E. Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, splňující:
1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ pro $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp x$ je rostoucí a spojitá v $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Funkce $\exp x$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty se ukáže, že

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} ;$$

podobně platí

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} , \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

Lemma 11.3. Pro $\forall x$, $y \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \exp(x+iy) &= \exp(x)\big[\cos y + i \sin y\big] , \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\big[\exp(ix) - \exp(-ix)\big] = \frac{1}{i}\sinh(ix) , \\ \cos x &= \frac{1}{2}\big[\exp(ix) - \exp(-ix)\big] = \cosh(ix) . \end{aligned}$$

Definice. Funkce $F(z)$ se nazve analytická v bodě z_0, jestliže existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ na jistém $U(z_0)$.
Funkce se nazve analytická v množině Ω, je-li analytická v každém bodě Ω.

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v $\mathbb{C}$, neboť pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$ platí $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!}(z-z_0)^k$.