

13. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergují v I bodově k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in I$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Značíme $f_n(x) \rightarrow f(x)$ v I .

Příklady. ① $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Potom $p_n(x) \rightarrow \exp x$ v \mathbb{R} .

② $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$. Potom $f_n(x) \rightarrow \operatorname{sgn} x$ v \mathbb{R} .

③ $f_n(x) = n^2 x \exp(-nx) \rightarrow 0$ v $[0, \infty)$.

Poznámka. Příklady demonstrují některé nedostatky bodové konvergence. Pokud $f_n(x) \rightarrow f(x)$, a $f_n(x)$ jsou spojitě, pak $f(x)$ nemusí být spojitá (příklad 2).

Pokud $f_n(x) \rightarrow f(x)$ v $[a, b]$, nemusí být $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ (příklad 3 pro $[a, b] = [0, 1]$).

To nás motivuje k zavedení lepšího, silnějšího pojmu konvergence funkcí.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergují v I stejnoměrně k funkci $f(x)$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0) \left[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]. \quad (1)$$

Značíme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I .

Poznámka. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ bodově v I , právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right]. \quad (2)$$

Rozdíl je pouze v pořadí kvantifikace x a n_0 . Při bodové konvergenci nejprve fixuji x , pak volím n_0 , tj. n_0 může obecně záviset na x .

Při stejnoměrné konvergenci najdu jedno n_0 , které pak funguje pro všechna $x \in I$.

Věta 13.1. Nechť $f_n(x)$ jsou spojitě v I , nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I . Potom $f(x)$ je spojitá v I .

Věta 13.2. Nechť $f_n(x)$ jsou spojitě v omezeném intervalu $[a, b]$, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a, b]$. Potom $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ pro $n \rightarrow \infty$.

Poznámka. $K = \sup_{x \in I} g(x)$ znamená 1. $g(x) \leq K$ pro $\forall x \in I$ a 2. $\forall K' < K$ $\exists x \in I$ tak, že $g(x) > K'$. Souhrnně: K je nejmenší horní odhad pro $g(x)$ na I .

Lemma 13.1. [sigma en.] Necht $f_n(x)$ jsou definovány v I . Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. Potom je ekvivalentní:

- (1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
- (2) $\sigma_n \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$

Poznámka. Často užívané úvahy:

1. Jestliže existují a_n (čísla nezávislá na x) taková, že $a_n \rightarrow 0$ a platí $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ pro $\forall x \in I$, tak potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I .

2. Jestliže existují $x_n \in I$ taková, že $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow 0$, pak $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ v I .

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \rightarrow 0$ v $[0, \infty)$; $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $[0, \infty)$; pro $\forall \eta > 0$ pevné $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[\eta, \infty)$; pro žádné $\delta > 0$ není $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[0, \delta)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I , jestliže

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } I \cap U(x_0, \delta)].$$

Značíme $f_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} f(x)$ v I .

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $(0, \infty)$, avšak $f_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} 0$ v $(0, \infty)$.

Poznámky. Zjevně platí: stejnoměrná konvergence se přenáší na menší množinu, tj. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I , $J \subset I \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v J .

Dále: stejnoměrná konvergence \implies lokálně stejnoměrná konvergence \implies bodová konvergence. (Žádnou implikaci nelze obrátit.)

Věta 13.1.' Necht $f_n(x) \in C(I)$, necht $f_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} f(x)$ v I . Potom $f(x) \in C(I)$.

Poznámka. Připomeňme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \rightarrow a$), právě když platí Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)[|b_m - b_n| < \varepsilon]. \quad (\text{BC})$$

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall m, n \geq n_0) [|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon]. \quad (\text{BC} - \text{st})$$

Věta 13.3. Necht' $f_n(x)$ jsou definovány v I . Potom je ekvivalentní:

- (1) existuje funkce $f(x)$ taková, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
- (2) $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence

Důsledek. $C([a, b])$ je úplný metrický prostor.

Poznámka. Jsou-li $f_n(x) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pak obecně

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right).$$

Příklad. Necht' $f_n(x) = \arctg(x/n)$; potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)) = \pi/2$, zatímco $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = 0$.

Věta 13.4. [Moore-Osgood.] Necht' $f_n(x)$, $f(x)$ jsou definovány v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ ($x_0, \delta > 0$ pevné.)

Necht'

1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$;
2. pro $\forall n$ pevné existuje konečná $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ – značme ji c_n .

Potom

1. existuje konečná $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ – značme ji c ;
2. platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

Poznámka. Závěr 2 vlastně říká

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Může být $x_0 = \pm\infty$, a platí jednostranné verze (tj. pro $x \rightarrow x_0 \pm$, pracuji na $\mathcal{P}_{\pm}(x_0, \delta)$.)

Poznámka. Další nevýhodou bodové konvergence je, že obecně

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \not\Rightarrow f'_n(x) \rightarrow f'(x),$$

dokonce ani

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow f'_n(x) \rightarrow f'(x).$$

Příklad. Polož $f_n(x) = n \operatorname{arctg} nx$; potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v \mathbb{R} , leč $f'_n(0) = 1$ pro $\forall n$, tj. $f'_n(x) \not\rightarrow 0$.

Věta 13.5. [Derivace člen po členu.] Nechť $f_n(x)$ jsou diferencovatelné v otevřeném intervalu I . Nechť existují $f(x)$, $g(x)$ takové, že $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $f'_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} g(x)$ v I .

Potom $f(x)$ je diferencovatelná a $f'(x) = g(x)$ v I .

Poznámka. Věta v podstatě říká, že

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Věta 13.5'. [Integrace člen po členu.] Nechť $u_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} u(x)$ v I , nechť $\int u_n(x) dx = U_n(x)$ v I , a nechť $U_n(x) \rightarrow U(x)$ v I . Potom $\int u(x) dx = U(x)$ v I .

Poznámka. Závěr věty zapsaný jinak:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n(x) dx.$$

Definice. Nechť $f_k(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Řekneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v I , jestliže existuje funkce $s(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$ taková, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I .

Řekneme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně v I , jestliže existuje $s(x)$ taková, že $s_n(x) \xrightarrow{\text{loc}} s(x)$ v I .

Věta 13.6. [Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.]

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I . Potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v I .

Definice. Řekneme, že funkce $f_k(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku (BC-st-r) stejnoměrné konvergence, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x \in I) (\forall n \geq n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \right].$$

Věta 13.7. Nechť $f_k(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I
- (2) $f_k(x)$ splňují v I (BC-st-r)

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I , jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konverguje stejnoměrně v I .

Věta 13.8. Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I . Potom konverguje stejnoměrně v I .

Věta 13.9. [Weierstrass.] Jsou dány $f_k(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$. Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že

1. $|f_k(x)| \leq a_k$ pro $\forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I .

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v \mathbb{R} . Nekonverguje stejnoměrně v \mathbb{R} .

Poznámka. Užitečné odhady: $|\sin y| \leq |y|$, $|\arctg y| \leq |y|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$; $0 \leq \ln(1+y) \leq y$ pro $\forall y \geq 0$.

Věta 13.10. [Stejneměrná verze Leibnizova kritéria.] Nechť $g_k(x) \Rightarrow 0$ v I , nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.

Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I .

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{kx}{1+k^2x^2}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, +\infty)$ pro $\forall \delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, +\infty)$.

Definice. Řekneme, že $f_n(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I , jestliže

$$(\exists M > 0) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) [|f_n(x)| \leq M].$$

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, jestliže

$$(\exists M > 0) (\forall x \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) \left[\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq M \right].$$

Věta 13.11. [Stejněměrná verze Dirichletova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I , a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I .

Poznámka. Z Lemmatu 10.4 plyne pro $\forall x \neq 2k\pi$

$$\left| \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad \left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, \delta]$.

Poznámka. Nechť existuje n_0 (nezávislé na x) takové, že $f_k(x) = g_k(x)$ pro $\forall x \in I, \forall k \geq n_0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I , právě když $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I .

Věta 13.12. [Stejněměrná verze Abelova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I . Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I , a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I .

Věta 13.13. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I . Označme $s(x)$ její součet. Potom $s(x) \in C(I)$.

Příklad. Z dřívějšíka víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Podle Věty 13.12 řada vlevo konverguje stejnoměrně v $[0, 1]$; podle Věty 13.13 je její součet $s(x)$ spojitý v $[0, 1]$, speciálně je spojitý v bodě 1 zleva.

Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Třetí rovnost díky tomu, že $s(x) = \ln(1+x)$ na $P_-(1)$; čtvrtá ze spojitosti fce \ln .

Věta 13.14. Nechť $f_k(x) \in C(I)$, kde $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený interval. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I . Potom

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Věta 13.15. Necht' $f_k(x)$ jsou diferencovatelné v I (otevřený interval). Necht' pro $\forall x \in I$ pevné $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, necht' $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně v I . Potom součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná funkce a platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x), \quad \forall x \in I.$$