

1. Spočítejte derivaci funkce

$$F(a) = \int_0^\pi \ln(1 + \cos^2 x + a \sin^2 x) dx$$

pro $a > 0$. Ověřte předpoklady věty o derivování integrálu podle parametru.

2. Spočítejte plošný integrál 1. druhu

$$\int_P z^2 dS,$$

kde $P \subset R^3$ je dána podmínkami $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

2b. Ověřte, že platí $d\Phi^*(\omega) = \Phi^*(d\omega)$, pokud $\omega = x^2 - y^2$ a $\Phi : (r, t) \mapsto (x, y)$ je dáno vztahy $x = r \cosh t$, $y = r \sinh t$.

3. Je dána úloha $\Phi(y) = \int_0^1 y(1+x) \exp x + \frac{1}{2}(y')^2 \exp x dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 3/2$. Najděte extrémaly. Jedná se lokální (globální) extrém?

4. Funkce $f(x)$ je 2π -periodická a $f(x) = (\pi - |x|)^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$. Najděte Fourierovu řadu, diskutujte její konvergenci, napište Parsevalovu rovnost.