## 15. Integrály závislé na parametru.

Studujeme funkce tvaru

$$F(a) = \int_J f(a,x)\,dx\,.$$

Pozor: $F$ není primitivní funkce k $f$. Integruje se podle $x$, interval $J$ je pevný. Nás zajímá závislost na $a$.

**Příklad.**

$$F(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-|a|x} \sin(ax)\,dx$$

Přímý výpočet dá $F(a) = 1/2a$ pro $a \neq 0$, $F(0) = 0$. Vidíme, že $F(a)$ je nespojitá, třebaže integrand závisí na $a$ spojitě. Vidíme, že předpoklad (iii) v následující větě nelze vynechat.

**Opakování.** měřitelná funkce ... (po částech) spojitá funkce je měřitelná "s.v.", skoro všude ... až na množinu míry nula; konečná, spočetná množina má míru nula
$g \in L(J)$ ... $g$ je integrovatelná na $J$, tj. $g$ je měřitelná a $\int_J |g(x)|\,dx < \infty$

**Značení.** Je-li $f(a,x)$ funkce dvou proměnných, značí $f(a,\cdot)$ funkci jedné proměnné (tj. $x$), která vznikne, pokud $a$ fixujeme. Podobně $f(\cdot,x)$ je funkcí jedné proměnné $a$ při pevném $x$.

**Věta 15.1.** [Spojitá závislost integrálu na parametru.] Nechť $f(a,x) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I$, $J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v $J$.
(ii) pro s.v. $x \in J$ je $f(\cdot,x)$ spojitá v $I$.
(iii) existuje $g \in L(J)$ tak, že $|f(a,x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in J$ a pro každé $a \in I$.
Potom je funkce

$$F(a) = \int_J f(a,x)\,dx$$

konečná a spojitá v $I$.

**Příklady.** ① Funkce

$$F(a) = \int_0^{100} \frac{a^2x^2}{a^4+x^4}\,dx$$

je spojitá v $\mathbb{R}$.
② Gamma funkce

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

je spojitá v $(0,\infty)$.

**Poznámka.** Dále nás zajímá, zda platí

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_J f(a,x)\,dx = \int_J \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\,dx\,.$$

Jde v podstatě o záměnu integrálu a limity(=derivace), tedy taková rovnost nemusí platit vždy. Srovnej předpoklad (iii) v následující větě.

**Věta 15.2.** [Derivace integrálu podle parametru.] Nechť $f(a,x) : I\times J \to \mathbb{R}$, kde $I$, $J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly, $I$ je otevřený. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v $J$.
(ii) pro s.v. $x \in J$ je $f(\cdot,x)$ diferencovatelná v $I$ (tj. $\exists$ konečná $\frac{\partial}{\partial a}f(a,x)$ pro $\forall a \in I$)
(iii) existuje $g \in L(J)$ tak, že $|\frac{\partial}{\partial a}f(a,x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in J$ a pro každé $a \in I$.
(iv) existuje $a_0 \in I$ tak, že $f(a_0,\cdot) \in L(J)$ (tj. $\int_J |f(a_0,x)|\,dx < \infty$.)
Potom funkce $F(a) = \int_J f(a,x)\,dx$ je konečná a

$$F'(a) = \int_J \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\,dx$$

pro každé $a \in I$.

**Příklady.** ① $F(a) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)\,dx$; $F'(a) = \frac{\ln a}{a^2-1}$.
② Pro gamma funkci platí: $\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\ln x) x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\;dx$,
$\Gamma''(s) = \int_0^\infty (\ln x)^2 x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\;dx > 0$, – a tedy je ryze konvexní.