

16. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL.

Značení. Tučným fontem značíme vektory $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Norma vektoru $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, skalární součin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá křivka, jestliže existuje $\boldsymbol{\varphi}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\gamma = \boldsymbol{\varphi}([a, b]) = \{\boldsymbol{\varphi}(t); t \in [a, b]\},$$

s těmito vlastnostmi:

- (i) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je spojitě a prostě v $[a, b]$
- (ii) $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je spojitě v (a, b) a $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro $\forall t \in (a, b)$

Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduchá uzavřená křivka, jestliže místo (i) požadujeme

- (i') $\boldsymbol{\varphi}$ je spojitě v $[a, b]$, prostě v (a, b) a $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$.

Terminologie: Dvojice $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ se nazývá parametrizace křivky. Alternativní terminologie (kterou my nepoužíváme) nazývá dvojici $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ křivkou, a γ je „geometrický obraz křivky“. V případě neuzavřené křivky se $\boldsymbol{\varphi}(a)$, $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazývají krajní body.

Příklady. ① $\gamma = \{(x^2 + y^2)^{3/2} = 2xy, x \geq 0, y \geq 0\}$, polární parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\sin(2t) \cos(t), \sin(2t) \sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$. (Viz obrázek.)

②. Graf C^1 funkce $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je křivka v \mathbb{R}^2 , parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá zobecněná křivka, jestliže existují jednoduché křivky γ_j , $j = 1, \dots, m$ tak, že

- (i) $\gamma = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$,
- (ii) po vynechání krajních bodů jsou γ_j vzájemně disjunktní.

Terminologie: $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ nazýváme přípustný rozklad křivky γ (není určen jednoznačně.)

Definice. [Integrál 1. druhu] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je křivka a $f(x) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ daná funkce. Integrál prvního druhu funkce f přes křivku γ značíme $\int_{\gamma} f ds$ a je definován takto:

1. Je-li γ jednoduchá křivka, pak

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| dt,$$

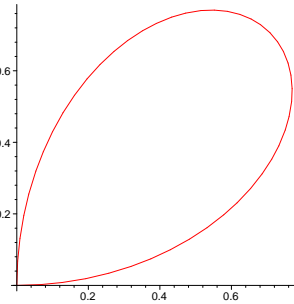


Figure 1:

kde $(\varphi, [a, b])$ je libovolná parametrizace γ .

2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f ds,$$

kde $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ je libovolný přípustný rozklad γ .

Lemma 16.1. [O reparametrizaci.] Nechť γ je jednoduchá (neuzavřená) křivka. Nechť $(\varphi, [a, b])$, $(\psi, [c, d])$ jsou dvě různé její parametrizace.

Potom existuje vzájemně jednoznačná funkce $\omega(\tau) : [c, d] \rightarrow [a, b]$; přičemž $\omega(\tau)$ je spojitá v $[c, d]$, $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c, d) a

$$\varphi(\omega(\tau)) = \psi(\tau) \quad \forall \tau \in [c, d].$$

Opakování. [Věta o substituci v \mathbb{R}] Nechť $\omega(\tau) : (c, d) \rightarrow (a, b)$ je vzájemně jednoznačná funkce, přičemž $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c, d) . Potom

$$\int_a^b g(t) dt = \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} g(\omega(\tau)) \omega'(\tau) d\tau = \int_c^d g(\omega(\tau)) |\omega'(\tau)| d\tau.$$

Věta 16.1.¹ Integrál prvního druhu nezávisí na parametrizaci, ani zvoleném rozkladu křivky.

Definice. Jednoduchá křivka je orientovaná, je-li určen směr probíhání. (U neuzavřené jednoduché křivky je ekvivalentní určit počáteční a koncový bod (p.b. , k.b.))

Zobecněnou křivku orientujeme tak, že zvolíme nějaký přípustný rozklad, a orientujeme jeho jednotlivé elementy. (tzv. orientovaný rozklad.)

Poznámky.

- parametrizace přirozeně vyjadřuje orientaci: směr probíhání $\varphi(t)$ pro t rostoucí. Říkáme, že parametrizace je/není ve shodě s orientací křivky.
- jednoduchá křivka připouští jen dvě různé orientace. U zobecněné křivky je jich více - přípustný rozklad s m prvky umožňuje 2^m různých orientací.

Příklad. Nechť $\gamma = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, orientovaná proti směru hodinových ručiček. Dvě různé parametrizace: $\varphi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$ a $\psi(\tau) = (\cos \tau, \sin \tau)$, $\tau \in [0, \pi]$. Druhá je ve shodě s orientací křivky. (Pozn. k Lemmatu 16.1: $\omega(\tau) = \cos \tau$.)

Dodatek k L.16.1 $\omega'(\tau) > 0$ (resp. $\omega'(\tau) < 0$) pro každé $\tau \in (c, d)$, pokud φ, ψ určují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

¹Důkaz pro jednoduchou křivku.

Definice. [Integrál 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ daná (vektorová) funkce. Integrál 2. druhu funkce \mathbf{F} po křivce γ značíme $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ a je definován takto:

1. Je-li γ jednoduchá, pak

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt,$$

kde $(\varphi, [a, b])$ je libovolná parametrizace γ , která je ve shodě s orientací.

2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

kde $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ je příslušný orientovaný rozklad γ .

Varianta značení: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_1 dx + F_2 dy (+ F_3 dz)$.

Věta 16.2. Integrál 2. druhu nezávisí na parametrizaci, je-li ve shodě s orientací. Není-li, vyjde s opačným znaménkem.

Definice. Řekneme, že (orientovaná zobecněná) křivka γ spojuje body $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ („jde od \mathbf{x}_0 do \mathbf{x}_1 “), jestliže γ je určena orientovaným rozkladem $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$, kde

- (i) p.b. $\gamma_1 = \mathbf{x}_0$
- (ii) k.b. $\gamma_j =$ p.b. $\gamma_{j+1}, j = 1, \dots, m - 1$
- (iii) k.b. $\gamma_m = \mathbf{x}_1$

Speciální případ: γ jednoduchá, orientovaná, p.b. $\gamma = \mathbf{x}_0$, k.b. $\gamma = \mathbf{x}_1$.

Pokud $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ (tento případ nevyklučujeme), jde o (zobecněnou) uzavřenou křivku.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve křivkově souvislá, jestliže pro libovolné $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in M$ existuje křivka γ spojující $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ taková, že $\gamma \subset M$.

Otevřená, křivkově souvislá množina se nazývá oblast.

Příklady. ① konvexní množina je křivkově souvislá

② \mathbb{R}^2 s vynechanou polopřímkou je nekonvexní, křivkově souvislá množina

③ \mathbb{R}^2 s vynechanou přímkou není křivkově souvislá

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorová funkce. Funkce $U(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve potenciál \mathbf{F} v Ω , jestliže $U \in C^1(\Omega)$, a $\nabla U = \mathbf{F}$ v Ω , tj. $\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x})$ pro $\forall \mathbf{x} \in \Omega, i = 1, \dots, n$.

Lemma 16.2. [O integrálu potenciálního pole.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Nechť $U(\mathbf{x})$ je potenciál $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ v Ω . Potom pro libovolnou křivku $\gamma \subset \Omega$, jdoucí od \mathbf{x}_0 do \mathbf{x}_1 , platí

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0).$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Řekneme, že integrál z \mathbf{F} nezávisí v Ω na cestě, jestliže

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\hat{\gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

pro libovolné dvě křivky $\gamma, \hat{\gamma} \subset \Omega$, spojující tytéž body $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$.

Věta 16.3. [O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spojité vektorové funkce. Potom je ekvivalentní:

- (1) \mathbf{F} má v Ω potenciál
- (2) integrál z \mathbf{F} nezávisí v Ω na cestě

Definice. Tečný vektor křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ v bodě \mathbf{x} definujeme

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|},$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}(t), [a, b])$ je libovolná parametrizace γ , a $t \in [a, b]$ je zvoleno tak, že $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Poznámka. $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ nezávisí (až na znaménko) na zvolené parametrizaci. Není definován v krajních bodech (spojovacích bodech zobecněné křivky).

Ekvivalentně můžeme psát

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \pm \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|},$$

znaménko $+$ platí, pokud $\boldsymbol{\varphi}$ je ve shodě s orientací γ , a \mathbf{T} chceme též ve směru orientace.

Věta 16.4. [Vztah integrálů 1. a 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}) ds,$$

kde \mathbf{T} je tečný vektor ke γ , volený ve shodě s orientací.

Poznámka. Levá strana je integrál 2. druhu; pravá strana integrál 1. druhu (ze skalární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x})$.)

Poznámka. [Význam křivkových integrálů.]

① $\int_{\gamma} 1 ds$ má význam délky křivky.

② je-li \mathbf{F} pole (gravitační, elektrické), vyjadřuje $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ sílu, kterou překonává částice (jednotkové hmotnosti, náboje) pohybem po křivce, tedy $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ je (až na znaménko a patřičnou konstantu) práce, kterou pohybem po křivce vykonáme

③ Lemma 16.2 lze zapsat jako

$$\int_{\gamma} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\text{k.b. } \gamma) - U(\text{p.b. } \gamma);$$

jde o variantu tvrzení “integrál derivace je přírůstek funkce”.

Poznámky.

- Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, značí $\overline{\Omega}$ uzávěr a platí $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, kde $\partial\Omega$ je hranice.
- zdánlivě samozřejmý vzoreček

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a),$$

nemusí platit, předpokládáme-li pouze g spojitá v $[a, b]$, g' je konečná a spojitá v (a, b) . Integrál vlevo totiž dle úmluvy chápeme vždy jako Lebesgueův, a g' nemusí být za výše uvedených předpokladů Lebesgueovskými integrovatelná. Vzoreček platí, pokud g' je nejen spojitá v (a, b) , ale má navíc spojitě rozšíření do krajních bodů. To motivuje následující definici.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, říkáme, že f je C^1 v $\overline{\Omega}$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existují a jsou spojitě v Ω , a navíc mají spojitě rozšíření do $\overline{\Omega}$.

Poznámka. Ve zbytku kapitoly se omezíme na situaci v \mathbb{R}^2 . (Některá zobecnění do vyšších dimenzí uvedeme v příští kapitole; nejsou přímočará.)

Definice. Je-li γ křivka v \mathbb{R}^2 , normálovým vektorem $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x} \in \gamma$ rozumíme jednotkový vektor, kolmý na tečný vektor $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. (Není definován tam, kde není definován \mathbf{T} ; je určen až na znaménko.)

Poznámka. Je-li (α, β) vektor v \mathbb{R}^2 , pak $(-\beta, \alpha)$ vznikne otočením o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček, zatímco $(\beta, -\alpha)$ je čtvrtotáčka ve směru hodinových ručiček.

Úmluva: „v kladném smyslu” znamená „proti směru hodinových ručiček”.

Definice. Divergence resp. rotace pole $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se definuje jako

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Věta 16.5. [Gaussova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je „rozumná“ oblast, $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je C^1 . Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka. Potom

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

kde \mathbf{n} je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

16.6. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je „rozumná“ oblast, $\mathbf{G} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ je C^1 . Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka, orientovaná tak, že obíhá kolem Ω v kladném smyslu. Potom

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{G} \, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Lemma 16.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ je C^1 , a \mathbf{F} má v Ω potenciál.

Potom $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ v Ω .

Poznámka. Zajímavější je obrácené tvrzení, tj. podmínka $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ (v praxi lehce ověřitelná) implikuje existenci potenciálu. Neobejde se však bez dodatečné podmínky na Ω .

Definice. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, má-li následující vlastnost: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená (zobecněná) křivka, tak množiny, které γ ohraničuje, leží též v Ω .

Ekvivalentně: γ lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω .

Příklady. ① $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$ je jednoduše souvislá.

② $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B$ je souvislá, ale ne jednoduše.

③ konvexní množina je vždy jednoduše souvislá. \mathbb{R}^2 s vynechanou polopřímkou je jednoduše souvislá množina.

Věta 16.7. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ je C^1 , a $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ v Ω .

Potom \mathbf{F} má v Ω potenciál.

Poznámka. Předpoklad jednoduché souvislosti nelze vynechat:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

je C^1 v $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, splňuje zde $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, přesto nemá v Ω potenciál. Sporem - nechť $\mathbf{F} = \nabla U$, potom díky Lemmatu 16.2. je integrál z \mathbf{F} po

každé uzavřené křivce roven nule. Ovšem snadno spočítáme, že integrál po kružnici obíhající počátek je nenulový.

Na každé jednoduše souvislé podmnožině $\hat{\Omega} \subset \Omega$ potenciál ovšem existuje; např. pro $\hat{\Omega} = \{x > 0\}$ máme $U = \operatorname{arctg}(y/x)$.