17. Plošný integrál.

Definice. Množina $P \subset R^3$ se nazve jednoduchá plocha, pokud $P = \boldsymbol{\varphi}(\Omega)$, kde $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, a $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to R^3$ splňuje:
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1, prosté
(ii) $h(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = 2$ všude v Ω
(iii) $\boldsymbol{\varphi}_{-1} : P \to \Omega$ je spojité
Dvojice $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ se nazývá parametrizace plochy P.

Poznámky.
• bod (ii) ... plocha nedegeneruje např. v křivku, $h(\nabla\boldsymbol{\varphi})$ značí hodnost matice $\nabla\boldsymbol{\varphi}$; bod (iii) ... vylučuje situaci, kdy kraj se dotýká vnitřku plochy

Příklady. ① Graf C^1 funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je plocha, parametrizace $\boldsymbol{\varphi} = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in \Omega$.
② Sférické souřadnice $x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos u$, kde $(u, v) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ parametrizují jednotkovou sféru s výjimkou jednoho "poledníku"

Poznámka. [Vnější součin.] Pro $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektory v R^3 definuji $u \times v$ jako vektor $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Vlastnosti:
• $(u + w) \times v = u \times v + w \times v$, $(au) \times v = u \times (av) = a(u \times v)$ (bilinearita)
• $u \times v = -(v \times u)$ (antisymetrie)
Geometrický význam:
• u, v jsou lineárně závislé, právě když $u \times v = 0$
• jsou-li u, v lineárně nezávislé, je $w = u \times v$ (jednoznačně určený) vektor s těmito vlastnostmi:
(1) w je kolmý na rovinu, určenou vektory u, v
(2) délka w je rovna ploše rovnoběžníku, určeného vektory u, v
(3) vektory u, v a w (v tomto pořadí) tvoří kladně orientovanou bázi, tj. determinant matice se sloupci u, v, w je kladný.

• pro $\forall u$, v, $w \in R^3$ platí: $w \cdot (u \times v) = \det[w, u, v]$, kde $[w, u, v]$ je matice se sloupci w, u, v (v tomto pořadí.)

Definice. Nechť $P \subset R^3$ je jednoduchá plocha, $f : P \to \mathbb{R}$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu P definujeme jako

$$\int_P f \, dS = \int_\Omega \big(f \circ \boldsymbol{\varphi}\big) \, \|\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\| \, du dv \,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ je libovolná parametrizace P.

Poznámka. Geometrický význam: $\int_P 1\,dS$ je obsah (dvourozměrná míra) plochy.

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $\boldsymbol{x} \in P$, a $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ je libovolná parametrizace P. Definujeme:
tečný prostor:

$$T_{\boldsymbol{x}}(P) = \mathrm{Lin}\big\{\partial_u \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x})), \partial_v \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x}))\big\}\,,$$

normálu:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \pm\left(\frac{\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}}{\|\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}\|}\right)(\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x}))$$

Zjevně $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, $\boldsymbol{n}(x) \perp T_x$.

Definice. Orientovat jednoduchou plochu značí určit preferovanou stranu (neboli rozlišit „rub“ a „líc“.)

Poznámky. Parametrizace vyjadřuje orientaci – strana plochy, na kterou ukazuje vektor $\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}$. Parametrizace je/není ve shodě s orientací plochy. Normála je určena až na znaménko. Pokud chceme normálu ve shodě s orientací, a parametrizace je ve shodě s orientací, platí

$$\boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}}{\|\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}\|}\,.$$

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce $\boldsymbol{F}$ přes plochu P definujeme jako

$$\int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_\Omega \big(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\varphi}\big) \cdot \big(\partial_u\boldsymbol{\varphi} \times \partial_v\boldsymbol{\varphi}\big)\, dudv\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ je libovolná parametrizace ve shodě s orientací P.
Integrand se dá zapsat také jako

$$\det\big[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}), \partial_u\boldsymbol{\varphi}, \partial_v\boldsymbol{\varphi}\big]\,.$$

V tradičním značení $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$.

Definice. Množina $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve zobecněná plocha, jestliže

$$P = \sum_{j=1}^{m} P_j \cup \Gamma \qquad (*)\,,$$

kde P_j jsou jednoduché plochy, splňující

$$P_j \cap \overline{P_{j'}} = \emptyset \qquad \forall\, j \neq j' \qquad (+)\,,$$

a Γ je konečné sjednocení jednoduchých křivek.

Poznámky. Platí $\overline{P_j} = P_j \cup \beta$, kde β je "okraj" plochy. Podmínka (+) říká: plochy jsou disjunktní, a okraj jedné nezasahuje do vnitřku druhé. Sjednocení (*) se nazývá přípustný rozklad P; není určen jednoznačně.

Příklady. ① Sféra $S_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ je zobecněná plocha; $S_2 = P_1 \cup P_2 \cup \Gamma$, kde P_i jsou polokoule – grafy $f = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\{x^2 + y^2 < 1\}$, Γ je rovník $\{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.
② hranice krychle $K = [0,1]^3$ je zobecněná plocha, přípustný rozklad

$$\bigcup_{j=1}^{6} P_j \cup \bigcup_{k=1}^{12} \gamma_k \,,$$

P_j jsou stěny, γ_k hrany.

Definice. Zobecněná plocha je orientovaná, pokud je pevně zvolen přípustný rozklad, a jeho elementy P_j jsou orientované (tzv. orientovaný rozklad.)

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je zobecněná plocha, (*) je přípustný (orientovaný) rozklad, $f : P \to \mathbb{R}$ resp. $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$. Potom definujeme

$$\int_P f\, dS = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} f\, dS \,, \qquad \int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} \,.$$

Definice. Pro $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme divergenci

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \,.$$

Věta 17.1. [Gaussova pro $\mathbb{R}^3$]. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je „rozumná" oblast, $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná plocha. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

Věta 17.2. [Vztah integrálu 1. a 2. druhu.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá, orientovaná plocha, $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$. Potom

$$\int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_P (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\, dS \,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k P, volená ve shodě s orientací.

Poznámky.
• Levá strana … integrál 2. druhu, pravá strana … integrál 1. druhu ze skalární funkce $f = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$. Srovnej Větu 16.4.
• Gaussovu větu lze tedy přeformulovat:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, d\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$$

přičemž orientace $\partial\Omega$ je směrem ven.

Vzorečky. ① Pro α, $\beta \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}.$$

② Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^3$ a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ splňují $[\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{\delta}]\, A$ (kde $[\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}]$ značí matici se sloupci $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.) Potom $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\delta}) \det A$.

Věta 17.3. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $f : P \to \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ libovolná parametrizace. Potom

$$\int_P f \, dS = \int_\Omega f \circ \boldsymbol{\varphi} \sqrt{g} \, du dv \,,$$

kde

$$g = \det \begin{pmatrix} \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_u \boldsymbol{\varphi} & \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} \\ \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} & \partial_v \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}$$

je tzv. Grammův determinant.

Příklad. Válcové souřadnice $x = \rho \cos u$, $y = \rho \sin u$, $z = v$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (pozor! $\rho > 0$ je konstanta). Pak je $\sqrt{g} = \rho$.

Opakování.
• věta o inverzi: nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\chi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ je C^1, a $\boldsymbol{u}^0 \in \Omega$ je takový bod, že $\nabla\chi(\boldsymbol{u}^0)$ je regulární matice.
Potom existuje $\mathcal{U}$ okolí $\boldsymbol{u}^0$ s těmito vlastnostmi: $\chi(\mathcal{U})$ je otevřená množina, χ je na $\mathcal{U}$ prostá a zobrazení k ní inverzní je C^1.
• Nechť Ω, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené. Zobrazení $\omega : \mathcal{O} \to \Omega$ se nazve difeomorfismus, pokud je vzájemně jednoznačné, C^1, a $J\omega = \det \nabla\omega \neq 0$ všude v $\mathcal{O}$.
• pro difeomorfismus platí věta o substituci:

$$\int_\Omega g \, d\lambda_k = \int_\mathcal{O} (g \circ \omega) |J\omega| \, d\lambda_k \,,$$

kde $g : \Omega \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce.

Lemma 17.1. [Reparametrizace plochy.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$, $(\boldsymbol{\psi}, \mathcal{O})$ její parametrizace. Potom existuje difeomorfismus $\omega : \mathcal{O} \to \Omega$ takový, že $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ \omega$.
Navíc: $J\omega > 0$ (resp. $J\omega < 0$), pokud $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ vyjadřují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

Důsledky. Tečný prostor nezávisí na zvolené parametrizaci. Normálový vektor (až na znaménko) též ne.

Věta 17.4.[1] Integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci. Integrál 2. druhu také ne – až na znaménko v případě neshody parametrizace s orientací.

Definice. $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace $(\boldsymbol{\varphi}, \Omega)$ s těmito vlastnostmi:
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá, C^1 a $h(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = 2$ dokonce na nějaké $\mathcal{O}$ striktně větší než Ω
(ii) $\partial\Omega$ je jednoduchá, uzavřená křivka.
Množina $\Gamma = \boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega)$ se nazývá okraj plochy.

Poznámka. Odsud nutně vyplývá, že Γ je též jednoduchá uzavřená křivka. Navíc: je-li χ parametrizace $\partial\Omega$, je $\boldsymbol{\varphi} \circ \chi$ parametrizace Γ.

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha s okrajem. Nechť křivka Γ (= okraj P) je orientovaná. Řekneme, že Γ obíhá P v kladném smyslu, jestliže (názorně řečeno): jdeme-li po okraji ve směru probíhání Γ, hlavou ve směru orientace P, máme plochu po levé ruce.

Poznámka. Tato definice platí jen v pravotočivých souřadných soustavách.

Definice. Pro $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme rotaci

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)$$

Věta 17.5. [Stokesova.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je plocha s okrajem Γ, nechť Γ obíhá P v kladném smyslu. Nechť $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O}$ je otevřená množina obsahující $\supset P \cup \Gamma$. Potom

$$\int_P \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,.$$

Definice. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$ lze stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.
Poznámka. Pro $n = 2$ to názorně znamená: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená křivka, tak "vnitřek" γ leží celý v Ω.
Pro $n = 3$ to značí: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená křivka, pak existuje plocha $P \subset \Omega$ taková, že γ je okraj P.

[1] Důkaz pro jednoduchou plochu.

Příklady. (Pro $\mathbb{R}^3$. Označ $B(0,r) = \{[x,y,z];\ x^2+y^2+z^2 < r^2\}$.)
① $\Omega = B(0,R) \setminus B(0,r)$, $R > r$ je jednoduše souvislá.
② $\Omega = B(0,R) \setminus \{[x,y,z];\ x^2+y^2 < r^2\}$ není jednoduše souvislá.

Lemma 17.2 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1 a má v Ω potenciál. Potom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ v Ω.

Věta 17.6 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1, a $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ v Ω. Nechť navíc Ω je jednoduše souvislá. Potom $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.

Poznámka. Srovnej Lemma 16.3 a Větu 16.7. v minulé kapitole.
V obecné dimenzi: nechť $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je C^1. Má-li $\boldsymbol{F}$ potenciál, pak

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \qquad \forall i \neq j$$

To je $\frac{n(n-1)}{2}$ podmínek. Naopak: jejich splnění zaručuje existenci potenciálu obecně jen pro jednoduše souvislou Ω.