

18. DIFERENCIÁLNÍ FORMY.

Definice. Nechť V je vektorový prostor nad \mathbb{R} dimenze n . Vnější součin se řídí následujícími pravidly ($u, v, w \in V, a \in \mathbb{R}$):

$$(0) \quad (av) \wedge v = u \wedge (av) = a(u \wedge v)$$

(i) distributivní zákon:

$$\begin{aligned} u \wedge (v + w) &= u \wedge v + u \wedge w \\ (u + v) \wedge w &= u \wedge w + v \wedge w \end{aligned}$$

(ii) asociativní zákon:

$$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$$

(iii) antikomutativita:

$$u \wedge v = -(v \wedge u)$$

Pozorování. Je $u \wedge u = 0$ pro $\forall u \in V$. Obecněji platí:

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k = 0,$$

právě když vektory u_1, \dots, u_k jsou lineárně závislé.

Definice. Pro $k \leq n$ definujeme

$$\Lambda^k(V) = \text{Lin}\{v_1 \wedge \cdots \wedge v_k; v_k \in V\}.$$

Prvky $\Lambda^k(V)$ se nazývají k -vektory. Zjevně $\Lambda^1(V) = V$. Klademe $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$. Tzv. Grassmanova algebra nad V je

$$\text{Lin}\left(\bigcup_{k=0}^n \Lambda^k(V)\right).$$

Poznámky.

- Nemá smysl definovat $\Lambda^k(V)$ pro $k > n = \dim(V)$, neboť dle předchozího pozorování jsou všechny k -vektory pro $k > n$ nulové.
- $\Lambda^k(V)$ je vektorový prostor – prvky lze sčítat, odčítat, násobit skalárem
- $\Lambda^*(V)$ je algebra – vektorový prostor, jehož prvky lze navíc násobit.

Jiná definice. Nechť e_1, \dots, e_n je báze V . Množina multiindexů stupně k , $k \leq n$ je

$$I(k, n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k); 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k \leq n\}.$$

Pro $\alpha \in I(k, n)$ značíme

$$e_\alpha := e_{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}.$$

Potom

$$\{e_\alpha; \alpha \in I(k, n)\}$$

je báze $\Lambda^k(V)$. Speciálně $\dim \Lambda^k(V)$ rovná se počet prvků $I(k, n)$, tj. $\binom{n}{k}$.

Příklad. $u = (1, 0, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Nechť e_i je kanonická báze. Potom

$$u \wedge v = (e_1 + 2e_3 + 3e_4) \wedge (-e_1 + e_4) = 4e_{14} + 2e_{13} + 2e_{34}.$$

Báze $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ je zde $\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$.

Lemma 18.1. Nechť $\{v_j\}_{j=1}^k$ a $\{u_j\}_{j=1}^k$ splňují $v_j = \sum_{l=1}^k a_{lj}u_l$, kde $A = \{a_{ij}\}$ je matice $k \times k$. Potom

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = (\det A) u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

Poznámka. Platí dokonce: nechtě $\{v_j\}_{j=1}^k$ jsou LN, $\{u_j\}_{j=1}^k$ jsou LN. Potom

$$\text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Lin}\{u_1, \dots, u_k\}$$

právě když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ takové, že

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \lambda u_1 \wedge \cdots \wedge u_k.$$

Definice. V dalším se vyskytuje vektorový prostor

$$T^*(\mathbb{R}^n) = \text{Lin}\{dx_1, \dots, dx_n\}.$$

Vektory dx_1, dx_2 (někdy píšeme dx, dy , nebo dt, du) se odvozují od proměnných daného prostoru; mají význam diferenciálu.

Definice. Nechť $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Diferenciální formou řádu k v \mathcal{O} rozumíme C^∞ zobrazení $\omega : \mathcal{O} \rightarrow \Lambda^k(T^*(\mathbb{R}^n))$. Tj. (formální součet)

$$\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \omega_\alpha dx_\alpha, \quad (1)$$

kde $\omega : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou C^∞ funkce, a $dx_\alpha = dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k}$ jsou k -vektory. $E^k(\mathcal{O})$ značí množinu všech forem řádu k v \mathcal{O} .

Příklady. ① $\omega = z e^{x-y} dx \wedge dy \in E^2(\mathbb{R}^3)$

$$\textcircled{2} \omega = (x_1 - x_2)dx_{123} - x_1 \sin x_3 dx_{145} \in E^3(\mathbb{R}^5)$$

Poznámky.

- $E^0(\Omega)$ ztotožňujeme se skalárními funkcemi z \mathcal{O} do \mathbb{R} .
- $\omega \in E^1(\mathbb{R}^n)$ má obecný tvar $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$, tj. lze ji považovat za funkci z \mathcal{O} do \mathbb{R}^n se složkami $\omega_1, \dots, \omega_n$.
- obecná $\omega \in E^k(\mathbb{R}^n)$ má $\binom{n}{k}$ složek ω_α , $\alpha \in I(k, n)$.

Definice. Vnější diferenciál d formy $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ definujeme takto:

1. pro $\omega \in E^0(\mathcal{O})$, tj. skalární funkci, klademe

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx_j.$$

2. pro $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ obecnou, tj. ve tvaru (1) výše, klademe

$$d\omega = \sum_{\alpha \in I(k, n)} (d\omega_\alpha) \wedge dx_\alpha = \sum_{\alpha \in I(k, n)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_\alpha.$$

Příklady. ① $\omega = z e^{x-y} dx \wedge dy \in E^2(\mathbb{R}^3)$, $d\omega = e^{x-y} dx \wedge dy \wedge dz$

② $\omega = (x_1 - x_2)dx_{123} - x_1 \sin x_3 dx_{145}$, $d\omega = x_1 \cos x_3 dx_{1345}$

③ $\omega = F_1 dx + F_2 dy$, (F_i jsou funkce proměnných x, y), $d\omega = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy$,

Poznámky.

- operace d zvyšuje řád formy o 1
- operace d je lineární, tj. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
- znamená dx_1 a) jeden z prvků $T^*(\mathbb{R}^n)$, nebo b) diferenciál aplikovaný na skalární funkci x_1 ? Vyjde to nastejno, neboť dle b) je

$$d(x_1) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_1}{\partial x_j} dx_j = dx_1.$$

Věta 18.1. Pro libovolnou formu η je $d(d\eta) = 0$.

Definice. Forma $\omega \in E^k(\mathcal{O})$ se nazve:

1. uzavřená, jestliže $d\omega = 0$;
2. exaktní, jestliže existuje $\eta \in E^{k-1}(\mathcal{O})$ taková, že $d\eta = \omega$.

Poznámky.

- dle věty 18.1. exaktní \implies uzavřená
- opačná implikace platí jen v některých \mathcal{O} (např. pro konvexní, jednoduchá souvislost obecně nestačí)

- situace je zobecněním problému "existence potenciálu" vs. "nulovost rotace"

Věta 18.2. [Gradované Leibnizovo pravidlo.] Nechť $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, $\eta \in E^l(\mathcal{O})$. Potom

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

Definice. Nechť $\omega \in E^l(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, tj. ω má tvar

$$\sum_{\alpha \in I(l,n)} \omega_\alpha dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_l}.$$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je C^∞ zobrazení, $\Phi(\Omega) \subset \mathcal{O}$. Potom definujeme formu $\Phi^*(\omega) \in E^l(\Omega)$ předpisem

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{\alpha \in I(l,n)} (\omega_\alpha \circ \Phi) \wedge d\Phi_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{\alpha_l}.$$

Operace Φ^* se nazývá přenesení ("pullback").

Příklady. ① $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$, $\Phi : (r, u) \mapsto (r \cos u, r \sin u) \dots$ potom $\Phi^*(\omega) = f(r \cos u, r \sin u) r dr \wedge du$

② $\omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \dots \phi^*(\omega) = (\mathbf{F} \circ \phi) \cdot \phi'$, kde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Lemma 18.2. Nechť $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, tj. ω má tvar

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Nechť $\omega \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\phi : \omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ je hladké zobrazení, $\phi(\Omega) \subset \mathcal{O}$. Potom

$$\phi^*(\omega) = (f \circ \phi) J\phi du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

(Proměnné v Ω značíme u_1, \dots, u_k .)

Definice. $S \subset \mathbb{R}^n$ se nazve k -plocha (připouštíme $1 \leq k \leq n$), pokud $S = \phi(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je oblast (tj. je otevřená, souvislá), a $\phi : \Omega \rightarrow S$ splňuje

- (i) ϕ je C^1 , prosté
- (ii) $\phi_{-1} : S \rightarrow \Omega$ je spojité
- (iii) $h(\nabla\phi) = k$ všude v Ω

Dvojice (ϕ, Ω) se nazývá parametrizace plochy.

Definice. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha. Integrál 1. druhu z funkce $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_S f dS_k = \int_\Omega (f \circ \phi) \sqrt{\det(\nabla\phi^T \nabla\phi)} du.$$

Speciálně k -rozměrnou míru S definujeme

$$\sigma_k(S) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\nabla\phi^T\nabla\phi)} du.$$

Lemma 18.2. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ je matice se sloupci $v_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, k$. Nechť $R(v_1, \dots, v_k)$ je rovnoběžnostěn, určený těmito vektory. Potom

$$\sigma_k(R(v_1, \dots, v_k)) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Věta 18.3.¹ Nechť $\omega, \eta \in E^*(\mathcal{O})$, a $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{O}$, $\Psi : M \rightarrow \Omega$, kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $M \subset \mathbb{R}^s$. Potom

1. $\Phi^*(\omega + \eta) = \Phi^*(\omega) + \Phi^*(\eta)$
2. $\Phi^*(\omega \wedge \eta) = \Phi^*(\omega) \wedge \Phi^*(\eta)$
3. $\Psi^*(\Phi^*(\omega)) = (\Phi \circ \Psi)^*(\omega)$
4. $\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*(\omega)$

Poznámka. Je-li $\omega \in \Lambda^k$, $\eta \in \Lambda^l$, je $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$. Speciálně, skaláry jsou prvky Λ^0 , a mohli bychom psát $2 \wedge \omega = \omega \wedge 2$; místo toho píšeme prostě 2ω .

Leibnizovo pravidlo (Věta 18.2) též platí pro $k = 0$, tj. pro skalární funkci f a libovolnou formu η je

$$d(f\eta) = df \wedge \eta + f \wedge d\eta.$$

Orientace. (Předběžná úvaha.) Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha, (ϕ, Ω_1) , (ψ, Ω_2) její parametrizace. Potom existuje (jednoznačně určený) $\delta : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ diffeomorfismus takový, že $\psi = \phi \circ \delta$. Navíc jakobián $J\delta$ nemění v Ω_2 znaménko.

Definice. Řekneme, že parametrizace (ϕ, Ω_1) , (ψ, Ω_2) plochy S vyjadřují stejnou orientaci, pokud $J\delta > 0$. Vyjadřují opačnou, pokud $J\delta < 0$ (všude v Ω_2). $-\delta$ je diffeomorfismus z předchozí úvahy.

Tím se všechny parametrizace rozdělí na dvě třídy; parametrizace z téže třídy vyjadřují stejnou orientaci. Parametrizace z rozdílných tříd vyjadřují opačnou orientaci.

Plocha je orientovaná, zvolím-li jednu z těchto tříd, kterou prohlásím za kladnou. Její prvky jsou parametrizace "ve shodě" s orientací plochy.

Definice. [Integrál z formy.]

¹Bez důkazu části 3.

1. Nechť $\omega \in E^k(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Tj. $\omega = f du_1 \wedge \dots \wedge du_k$. Potom klademe

$$\int_{\Omega} \omega := \int_{\Omega} f d\lambda_k,$$

integrál vpravo chápeme jako Lebesgueův.

2. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -plocha, $\omega \in E^k(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \supset S$ je otevřená množina. Potom definujeme

$$\int_S \omega := \int_{\Omega} \phi^*(\omega),$$

kde (ϕ, Ω) je libovolná parametrizace ve shodě s orientací S . Integrál vpravo je definován ve smyslu předchozího bodu.

Definice. Nechť $S_i \subset \mathbb{R}^n$ jsou k -plochy s parametrizacemi (ϕ_i, Ω_i) , $i = 1, \dots, s$. Řetězcem (neboli zobecněnou k -plochou) rozumíme (formální) sumu

$$c := \sum_{i=1}^s n_i \phi_i,$$

kde $n_i = \pm 1$. Integrál přes řetězec definujeme

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^s n_i \int_{S_i} \omega.$$

Poznámka. Řetězec je sjednocení S_i , kde $n_i = \pm 1$ značí, že část S_i bereme s orientací stejnou/opačnou jako je ta, kterou vyjadřuje parametrizace ϕ_i .

Definice. Pro krychli $I = [0, 1]^k$ definujeme $I_j \subset \mathbb{R}^{k-1}$ jako průmět I do roviny $\{x_j = 0\}$. Zobrazení $\varphi_{j,\alpha} : I_j \rightarrow I$,

$$\varphi_{j,\alpha}(y_1, \dots, y_{k-1}) = (y_1, \dots, \alpha, \dots, y_{k-1}),^2$$

kde $1 \leq j \leq k$, $\alpha = 0, 1$ parametrizují stěny I . Okrajem I rozumíme řetězec

$$\partial I = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \varphi_{j,\alpha}.$$

Definice. Plocha S se nazve k -dimenzionální singulární krychle, pokud existuje parametrizace (ϕ, Ω) taková, že $\Omega = (0, 1)^k$.

²Konstanta α stojí na j -té pozici.

Pokud ϕ má vlastnosti parametrizace na nějaké otevřené $\hat{\Omega} \supset [0, 1]^k$, definujeme okraj S jako řetězec

$$\partial S = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \phi \circ \varphi_{j,\alpha}.$$

V tom případě se S nazývá singulární krychle s okrajem. Výše uvedený rozklad dává ∂S orientaci, která je "sladěná" s orientací S , určenou pomocí ϕ .

Věta 18.4.³ [Obecná Stokesova věta.] Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je k -dimenzionální singulární krychle s okrajem ∂S . Nechť S a ∂S mají sladěné orientace, a $\omega \in E^{k-1}(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O} \supset S$ je otevřená. Potom

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Poznámka. Jde o velmi obecné tvrzení, které jako speciální případ zahrnuje např. Lemma 16.2, Věty 16.5, 16.6 nebo 17.1.

³Bez důkazu.