

A. Napište jako součet mocninné řady o daném středu:

1. $f(z) = \cosh^2 z, z = 0$
2. $f(z) = \sin^2 z, z = 0$
3. $f(z) = \frac{1}{az+b}, z = 0, b \neq 0$
4. $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+5}, z = 1$
5. $f(z) = \sin(2z - z^2), z = 1$
6. * $f(z) = \exp z \sin z, z = 0$
7. * $f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right), z = 0$

B. Rozviňte do Laurentovy řady o daném středu:

1. $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}, z = a$
2. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, z = i$
3. $f(z) = (z+1)^2 \exp(1/z), z = 0$
4. $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right), z = 1$
5. * $f(z) = \sin z \sin(1/z), z = 0$
6. * $f(z) = \exp(z + 1/z), z = 0$

U příkladů * stačí nalézt část řady, jinak se žádá tvar celé sumy.

C. Přímou z definice spočítejte křivkové integrály:

1. $\int_{\varphi} |z| dz$, φ je úsečka od 0 do $2 + i$.
2. $\int_{\varphi} \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z) dz$, φ je část kružnice $\{|z| = \sqrt{2}\} \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cap \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$, proběhnutá ve směru hodinových ručiček.
3. $\int_C z/\bar{z} dz$, C je křivka $\{|z| = \sqrt{3}\} \cap \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$, proběhnutá proti směru hodinových ručiček.
4. $\int_C 1/z dz$, C je trojúhelník s vrcholy 1, 2 a i , orientovaný kladně.

D. Spočtete integrály:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3} dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x) \sin x}{x^4+10x^2+9} dx$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2} dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos x}{x^2-4x+5} dx$

5. $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1-a \sin^2 x} dx$, $a \in (0, 1)$

$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos^2 x)^2}$, $a, b > 0$

6. $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x} dx$

$\int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin x} dx$, $k \in \mathbb{N}$

Integrály chápejte jako Newtonovy.