2.7.2007

1.[8b] Pomocí reziduové věty spočítejte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x \, dx}{(1-2p\cos x + p^2)^2},$$

kde $p > 1$.

2.[8b] Najděte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+e}.$$

V příkladech 1 a 2 vysvětlete podrobně:

- na jakou funkci a křivku se reziduová věta použije, kde je souvislost s počítaným příkladem
- proč jdou určité části křivkových integrálů do nuly (v případě, že se takové v příkladu vyskytnou)
- které singularity nás zajímají, a jak budeme počítat jejich rezidua

---

3.[5b] U funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4+4z^2}$$

určete:
(a) alespoň dva (nenulové) členy Laurentova rozvoje o středu $z = 0$
(b) rezidua ve všech ostatních singularitách

Návod: v případě (a) najděte nejprve rozvoj funkce $1/(z^2+4)$.

[8b]

1 $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(1-2p\cos x+p^2)^2}\,dx\,; \quad \boxed{p>1}$$

$$I = \int_\varphi g\,; \qquad g(z) = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(1-\frac{2p}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+p^2\right)^2 \cdot iz}$$

φ ← jednotková kružnice

$$= \frac{-i\,(z^2+1)}{2\left(-pz^2+(p^2+1)z-p\right)^2} \qquad [2]$$

rozklad jmenovatele: $D = (p^2+1)^2 - 4p^2 = p^4+2p^2+1-4p^2$
$$= p^4-2p^2+1 = (p^2-1)^2 > 0$$

kořeny: $$\frac{-(p^2+1)\pm(p^2-1)}{-2p} = \begin{cases} p \\ \frac{1}{p} \end{cases} ; \qquad [1]$$

podobně: $-pz^2+(p^2+1)z-p = -p\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)$

a sice $= (z-p)(1-pz)$. $\qquad [1]$

⟹

uvnitř φ leží jen $1/p$; tudíž:

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{1/p} g(z) \qquad [1]$$

wzór na residua: $$g(z) = \underbrace{\frac{-i(z^2+1)}{2p^2(z-p)^2}}_{h(z)} \cdot \frac{1}{\left(z-\frac{1}{p}\right)^2};$$

stąd: $$\mathrm{res}_{1/p}\, g = h'\left(\frac{1}{p}\right);$$ [1]

pomocny wzór: $$h'(z) = \frac{-i}{2p^2} \cdot \frac{1}{(z-p)^4}\left[2z(z-p)^2 - 2(z-p)(z^2+1)\right]$$

$$= \frac{-i}{\cancel{2}p^2} \frac{1}{(z-p)^3}\left[\cancel{2}z(z-p) - \cancel{2}(z^2+1)\right]$$

$$= \frac{i(pz+1)}{p^2(z-p)^3}$$ [1]

$$h'\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{i\cdot 2}{p^2\left(\frac{1}{p}-p\right)^3} = -\frac{2ip}{(p^2-1)^3}.$$

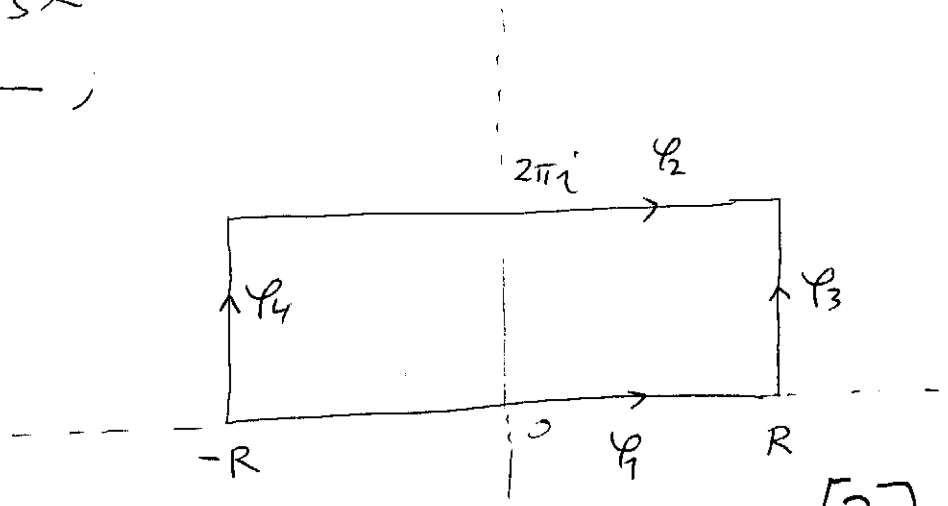
$$I = \frac{4\pi p}{(p^2-1)^3}.$$ [1]

(2) $\left[\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+e}\right]^{\wedge}(\xi) = \,?$

[8b]

$$g(z) = \frac{e^{z}\cdot e^{-2\pi i \xi z}}{e^{2z}+e}\,,$$

křivky:



[2]

$$\varphi := \varphi_1 + \varphi_3 \dot{-} \varphi_2 \dot{-} \varphi_4$$

pro $R\to\infty$ platí: $\displaystyle\int_{\varphi_1} g \to \hat{f}(\xi)$;

$$\int_{\varphi_2} g \to e^{4\pi^2\xi}\cdot\hat{f}(\xi)$$

(1)

$\displaystyle\int_{\varphi_3},\ \int_{\varphi_4} \to 0.$

$$\int_{\varphi_3} g = \int_0^1 \frac{e^{R+2\pi i t}\cdot e^{-2\pi i \xi (R+2\pi i t)}}{e^{2(R+2\pi i t)}+e}\,2\pi i\,dt$$

dk.: (pro φ_3):

$\varphi_3 = R + 2\pi i\cdot t$; $t\in[0,1]$. $|\cdot| = e^{R}$ $|\cdot| = e^{2R}$ $|\cdot| = e^{4\pi^2\xi t} \le e^{4\pi^2|\xi|}$

$$\left|\int_{\varphi_3}\right| \le \frac{e^{R}\cdot e^{4\pi^2|\xi|}\cdot 2\pi}{e^{2R}-e} \to 0.$$

$\Rightarrow$ tedy integrand $\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$

[1]

? singularity: $e^{2z}+e=0$

$$e^{2z}=-e=e^{1+i\pi}$$

$$2z=1+i\pi+2k\pi i;\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$z=\frac{1}{2}+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i;$$

uvnitř φ leží jen $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{i\pi}{2}}_{z_1}$ a $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{3i\pi}{2}}_{z_2}$; [1]

celkem tedy: $\hat{f}(\xi)=\frac{2\pi i}{1-e^{4\pi^2\xi}}\left\{\operatorname{res}_{z_1} g+\operatorname{res}_{z_2} g\right\}$

$\xi\neq 0.$

výpočet residuí:

$$\operatorname{res}_{z_1} g=\left.\frac{e^{z(1-2\pi i\xi)}}{2e^{2z}}\right|_{z=z_1}=\frac{+i\sqrt{e}}{2(-e)}\cdot e^{-\pi i\xi}\cdot e^{\pi^2\xi}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} g=\left.\frac{e^{z(1-2\pi i\xi)}}{2e^{2z}}\right|_{z=z_2}=\frac{-i\sqrt{e}}{2(-e)}\cdot e^{-\pi i\xi}\, e^{3\pi^2\xi}$$ [2]

$$\hat{f}(\xi)=\frac{\pi}{\sqrt{e}}\left[e^{\pi\xi(\pi-i)}-e^{\pi\xi(3\pi-i)}\right]\cdot\frac{1}{1-e^{4\pi^2\xi}};\ \xi\neq 0$$

$\hat{f}(0)=\frac{\pi}{2\sqrt{e}}$ (limitně nebo přímo z definice). [1]

viz další strana.

(a) z definice: $\ddagger$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i 0 \cdot x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{2x} + e} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} y = e^x \in (0,\infty) \\ dy = e^x dx \end{array}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + e} = \frac{1}{e} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{1}{e}\left[\sqrt{e}\, \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{e}}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{e}}.$$

(b) limita:
$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\pi}{\sqrt{e}} \cdot \frac{e^{\pi\xi(\pi - i)} - e^{\pi\xi(3\pi - i)}}{1 - e^{4\pi^2 \xi}}$$

l'Hospital:
$$\frac{\pi}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\pi(\pi - i)\, e^{\pi\xi(\pi-i)} - \pi(3\pi - i)\, e^{\pi\xi(3\pi - i)}}{-4\pi^2 e^{4\pi^2\xi}}$$

$$\to \frac{\pi}{\sqrt{e}} \cdot \frac{\pi(\pi - \cancel{i}) - \pi(3\pi - \cancel{i})}{-4\pi^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}.$$

[5b]

3

(a) $\frac{1}{4+z^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{16}-\frac{z^6}{64}+\dots\right.$

$$= \frac{1}{4} - \frac{z^2}{16} + \frac{z^4}{64} - \frac{z^6}{256} + \dots$$

[1]

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - \frac{z^5}{5040} + \dots$$

[1]

celkem: $f(z) = \frac{1}{4z} + z\underbrace{\left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{24}\right)}_{-\frac{5}{48}} + \dots$

[1]

(b) $z_1 = 2i$; $z_2 = -2i$. (jednoduché póly)

$$\operatorname{res}_{z_1} f = \left.\frac{\sin z}{z^2(z^2+4)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{\sin z}{z^2(2z)}\right|_{z=2i}$$

$$= \frac{\sin(2i)}{-4(2\cdot 2i)} = \frac{\sinh(2)}{-16i};$$

[2]

$\operatorname{res}_{z_2} f =$ vyjde totéž.