Laplaceova transformace.

Označme

$$L^1_+ := \big\{ f(t) : (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ měřitelná, a } \exists c_f \text{ tak, že } \int_0^\infty |f(t)|\, \mathrm{e}^{-c_f t}\, dt < \infty \big\}.$$

Pro $f(t) \in L^1_+$, $p > c_f$ definujeme

$$\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) := \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, dt.$$

Tvrzení 1. [Základní vlastnosti.]

1. $f(t) \in L^1_+ \implies af(t) \in L^1_+$ a platí
$$\mathscr{L}\big[af(t)\big](p) = a\mathscr{L}\big[f(t)\big](p).$$

2. $f(t),\, g(t) \in L^1_+ \implies f(t) + g(t) \in L^1_+$ a platí
$$\mathscr{L}\big[f(t) + g(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p) + \mathscr{L}\big[g(t)\big](p).$$

3. $f(t) \in L^1_+$, $a > 0 \implies f(at) \in L^1_+$ a platí
$$\mathscr{L}\big[f(at)\big](p) = a^{-1}\mathscr{L}\big[f(t)\big](a^{-1}p).$$

4. $f(t) \in L^1_+ \implies \mathrm{e}^{at} f(t) \in L^1_+$ a platí
$$\mathscr{L}\big[\,\mathrm{e}^{at} f(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p - a).$$

Tvrzení 2. [Obrazy základních funkcí.]

1. $$\mathscr{L}\big[\,\mathrm{e}^{at}\,\big](p) = \frac{1}{p - a}.$$
   Speciálně $\mathscr{L}\big[1\big](p) = p^{-1}$.

2. $$\mathscr{L}\big[t^n\big](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

3. $$\mathscr{L}\big[\,\sin at\big](p) = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

4.
$$\mathscr{L}\big[\cos at\big](p) = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Tvrzení 3. [Hlubší vlastnosti.]

1. $f(t) \in L^1_+$, $n \in \mathbb{N} \implies t^n f(t) \in L^1_+$ a platí
$$\mathscr{L}\big[t^n f(t)\big](p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \mathscr{L}\big[f(t)\big](p).$$

2. $f(t)$, $g(t) \in L^1_+ \implies f * g(t) \in L^1_+$ a platí[1]
$$\mathscr{L}\big[f * g(t)\big](p) = \mathscr{L}\big[f(t)\big](p) \cdot \mathscr{L}\big[g(t)\big](p).$$
Speciálně
$$\mathscr{L}\Big[\int_0^t f(s)ds\Big](p) = \frac{1}{p}\mathscr{L}\big[f(t)\big](p).$$

3. $f(t)$ je C^1 v $[0, \infty)$, $f(t)\,\mathrm{e}^{-c_f t}$ omezená, a $f'(t) \in L^1_+ \implies$
$$\mathscr{L}\big[f'(t)\big](p) = p\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - f(0).$$
Obecněji
$$\mathscr{L}\big[f''(t)\big](p) = p^2\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - f'(0) - pf(0)\,,$$
$$\mathscr{L}\big[f^{(n)}(t)\big](p) = p^n\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-j)}(0)\,.$$

4. Zobrazení $f(t) \mapsto \mathscr{L}\big[f(t)\big](p)$ je prosté (a.k.a. Lerchova věta.) Podrobněji: jestliže pro $f(t) \in L^1_+$ existuje c takové, že $\mathscr{L}\big[f(t)\big](p) = 0$ pro $\forall p > c$, je $f(t) = 0$ skoro všude.

Příklad 1. Uvažujme úlohu
$$\begin{aligned} x' &= 7x - 2y + 8t\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y' &= 8x - y, \end{aligned}$$
s počáteční podmínkou $x(0) = 0$, $y(0) = 1/2$. Víme, že řešení existuje a lze ověřit, že je prvkem L^1_+. Označme $X(p) = \mathscr{L}\big[x(t)\big](p)$, $Y(p) = \mathscr{L}\big[y(t)\big](p)$.

[1] Konvoluci definujeme $f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$.

Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} pX(p) &= 7X(p) - 2Y(p) + \frac{8}{(p+1)^2}, \\ pY(p) - \frac{1}{2} &= 8X(p) - Y(p). \end{aligned}$$

Odsud

$$\begin{aligned} X(p) &= -\frac{p-7}{(p+1)\,(p-3)^2}, \\ Y(p) &= \frac{p^3 - 5\,p^2 - 13\,p + 121}{2\,(p+1)^2\,(p-3)^2}. \end{aligned}$$

Rozložme na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{2(p-3)}, \\ Y(p) &= \frac{4}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{2}{(p-3)^2} - \frac{3}{2(p-3)}. \end{aligned}$$

Nyní stačí uvážit, že $\mathscr{L}\big[\,\mathrm{e}^{at}\,\big] = \frac{1}{p-a}$, $\mathscr{L}\big[t\,\mathrm{e}^{at}\,\big] = \frac{1}{(p-a)^2}$ (a že zobrazení $f(t) \mapsto \mathscr{L}\big[f(t)\big]$ je prosté), a dostáváme

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + (t - \frac{1}{2})\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y(t) &= (4t+2)\,\mathrm{e}^{-t} + (2t - \frac{3}{2})\,\mathrm{e}^{3t}. \end{aligned}$$

Příklad 2. Uvažme obecnou homogenní úlohu (tj. $\boldsymbol{x}$ je vektor, A matice)

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}.$$

Fundamentálním řešením rozumíme matici $U = U(t)$ takovou, že

$$U' = AU, \qquad U(0) = I.$$

Označíme-li $\Omega(p) = \mathscr{L}\big[U(t)\big]$, je $p\Omega(p) - I = A\Omega(p)$, neboli

$$\Omega(p) = (pI - A)^{-1}.$$

Odtud pak dopočteme $U(t)$. Uvažujme například

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} \frac{p+2}{p^2+1} & \frac{p-3}{p^3-p^2+p-1} & \frac{1-2\,p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{-1}{p^2+1} & \frac{p^2-p+2}{p^3-p^2+p-1} & \frac{p}{p^3-p^2+p-1} \\ \frac{2}{p^2+1} & \frac{2}{p^2+1} & \frac{p-1}{p^2+1} \end{pmatrix}.$$

Podívejme se blíže na druhý člen na prvním řádku. Parciální zlomky

$$\frac{-1}{p-1} + \frac{p+2}{p^2+1}.$$

Připomeňme, že $\mathscr{L}\big[\sin at\big] = \frac{a}{p^2+a^2}$, $\mathscr{L}\big[\cos at\big] = \frac{p}{p^2+a^2}$. Odtud

$$U_{12}(t) = -\,\mathrm{e}^t + \cos t + 2\sin t.$$

Celkem dopočítáme $U(t) =$

$$\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t, & -\,\mathrm{e}^t + \cos t + 2\sin t, & -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(\cos t - 3\sin t) \\ \sin t, & \mathrm{e}^t - \sin t, & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ 2\sin t, & 2\sin t, & \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při řešení soustav se často hodí fakt, že inverzní matici lze spočítat pomocí explicitních vzorců:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a obecněji $A^{-1} = B$, kde $b_{ij} = (\det A)^{-1}(-1)^{i+j} A_{ji}$, přičemž A_{ji} je subdeterminant, který vznikne vyškrtnutím j-tého řádku a i-tého sloupce.