$\triangle$ Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключения. Ее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t], \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \\ y = \frac{1}{2}[(C_1(t) - C_2(t))\cos t + (C_1(t) + C_2(t))\sin t], \end{cases}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений. Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)\cos t + \dot{C}_2(t)\sin t = 0, \\ \dot{C}_1(t)\sin t - \dot{C}_2(t)\cos t = \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = 1$, $\dot{C}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln|\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + t\cos t - \sin t \ln|\sin t|,$$

$$y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + (t + \ln|\sin t|)\cos t + (t - \ln|\sin t|)\sin t].$$

$\blacktriangle$

Линейные системы уравнений можно также решать операционным методом, т. е. методом, использующим преобразование Лапласа.

Пример 5. Операционным методом решить задачу Коши при $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 4e^{3t}, \\ \dot{y} = 4x - y - 8e^{3t}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

$\triangle$ Положим при $t < 0$ решение $x(t)$, $y(t)$ системы и свободные члены системы тождественно равными нулю. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и свободные члены системы являются оригиналами. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$, $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p)$.

Переходя в заданной системе уравнений к преобразованиям Лапласа, т. е. умножая каждое уравнение системы на e^{-pt} и интегрируя его по t от нуля до бесконечности, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для нахождения $X(p)$ и $Y(p)$

$$\begin{cases} (p-3)X(p) + Y(p) = 1 + \frac{4}{p-3}, \\ -4X(p) + (p+1)Y(p) = -\frac{8}{p-3}. \end{cases}$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из полученной системы уравнений находим

$$X(p) = \frac{(p+1)(p-3) + 4(p+3)}{(p-3)(p-1)^2}, \quad Y(p) = \frac{4(7-p)}{(p-3)(p-1)^2}.$$

Разлагая выражения для $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби, имеем

$$X(p) = \frac{6}{p-3} - \frac{5}{p-1} - \frac{6}{(p-1)^2}, \quad Y(p) = \frac{4}{p-3} - \frac{4}{p-1} - \frac{12}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$x(t) = 6e^{3t} - (5 + 6t)e^t, \quad y(t) = 4e^{3t} - 4(1 + 3t)e^t.$$

$\blacktriangle$

Решить линейные однородные системы второго порядка (1—14):

1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 6x + 7y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y, \\ \dot{y} = 20x + 12y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + 7y. \end{cases}$

Решить линейные однородные системы уравнений третьего порядка (15–116):

15. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y - 2z, \\ \dot{y} = 10x + 4y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + y + 3z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = -8x - 3y + 2z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 6z. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y - 4z, \\ \dot{y} = 9x - 5y + 6z, \\ \dot{z} = 15x - 18y + 15z. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z, \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = -6x - 2y - z. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y - z, \\ \dot{y} = x + 3y + z, \\ \dot{z} = 7x + 3y + z. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + z, \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = x + 6y + 2z, \\ \dot{z} = -5x - 7y - 3z. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = -x + 4y - z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 6z. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = 9x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 20x - 20y + 10z. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 4z, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -3x + 4y + 8z. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 8x - 3y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - 2y + 3z. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x - 3y + 3z. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 8y + 6z, \\ \dot{y} = -4x + 10y + 6z, \\ \dot{z} = 4x - 8y - 4z. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 3z, \\ \dot{y} = -2x + y + 5z, \\ \dot{z} = -x - y + 6z. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 3z, \\ \dot{y} = 2x + 4y + 6z, \\ \dot{z} = 3x + 6y + 9z. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + 5y - 4z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 5z. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2z, \\ \dot{y} = 6x - 4y + 4z, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 5z. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - z. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = 3y + 2z. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y - 2z, \\ \dot{z} = x + 2y + z. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 7y + z, \\ \dot{z} = 5x - 5y - 3z. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = x - 6y + 3z, \\ \dot{y} = -8y + 6z, \\ \dot{z} = 3x - 12y + 7z. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + z, \\ \dot{y} = x - 8y + 3z, \\ \dot{z} = 3x - 7y. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dot{x} = -5y + 3z, \\ \dot{y} = -x - 6y + 5z, \\ \dot{z} = x - 9y + 6z. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 3z, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 5z, \\ \dot{z} = -x - 3y + z. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 2z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \\ \dot{z} = -2x - 4y - z. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = -x - y + 2z. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = -y - 2z, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z, \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 2z. \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 4x + y + 2z. \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$

53. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + z, \\ \dot{y} = -3y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 3z. \end{cases}$

54. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y + 9z, \\ \dot{y} = 10x + 9y - 10z, \\ \dot{z} = x + y + 3z. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = x - y + z. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 7y - z, \\ \dot{y} = 2x - 3y - z, \\ \dot{z} = -2x + 2y + 3z. \end{cases}$

57. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z. \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + 2z, \\ \dot{y} = -5x - y + 2z, \\ \dot{z} = -7x - 3y + 6z. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y - 2z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = 3x + 9y - 4z. \end{cases}$

60. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 4z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + 12z, \\ \dot{z} = x - y - 5z. \end{cases}$

61. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = -6x + 7y + z. \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y - 2z, \\ \dot{y} = -5x - 7y + z, \\ \dot{z} = 6x + 8y - z. \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$

64. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x - z, \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$

65. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 4x + z. \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z, \\ \dot{z} = -2x - y - z. \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 3y - 5z, \\ \dot{y} = -x - y - z, \\ \dot{z} = 3x - 2y + 2z. \end{cases}$

68. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z. \end{cases}$

69. $\begin{cases} \dot{x} = -3y + 3z, \\ \dot{y} = -x - 4y + 6z, \\ \dot{z} = -2y + 2z. \end{cases}$

70. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y - 2z, \\ \dot{y} = -5x - 7y + z, \\ \dot{z} = 6x + 8y - z. \end{cases}$

71. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2z, \\ \dot{y} = 3x + 5y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2y - z. \end{cases}$

72. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y - z, \\ \dot{y} = -x + 2y + z, \\ \dot{z} = 4x - 4y - z. \end{cases}$

73. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 12y - 3z, \\ \dot{y} = -x - 5y + z, \\ \dot{z} = -x - 12y + 4z. \end{cases}$

74. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y - 8z, \\ \dot{y} = 7x - 11y - 17z, \\ \dot{z} = -3x + 4y + 6z. \end{cases}$

75. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 7y + 4z, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = -2x + 3y. \end{cases}$

76. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + z, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = -y + z. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + z, \\ \dot{y} = 2x - 5y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 2z. \end{cases}$

78. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - z, \\ \dot{y} = 7x + 4y - z, \\ \dot{z} = 13x + 7y - 3z. \end{cases}$

79. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = -5x + 4y - z. \end{cases}$

80. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = -x + 4y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 5y - 2z. \end{cases}$

81. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 3z, \\ \dot{y} = -6x + y - 5z, \\ \dot{z} = -3x + 2y - 4z. \end{cases}$

82. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -2x - 3y - 4z. \end{cases}$

83. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = -4x + 2y - z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 6z. \end{cases}$

84. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = 4x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = 6x + 7y - 6z. \end{cases}$

85. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = x + 4y - z, \\ \dot{z} = 3x + 6y - 4z. \end{cases}$

86. $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y - 2z, \\ \dot{y} = -x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 15y - 6z. \end{cases}$

87. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 6z. \end{cases}$

88. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$

89. $\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x - 4y, \\ \dot{z} = x - 2y - 2z. \end{cases}$

90. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + 3y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 4z. \end{cases}$

91. $\begin{cases} \dot{x} = 12x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 9y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 3z. \end{cases}$

92. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 6y - 15z, \\ \dot{y} = x + 5y - 5z, \\ \dot{z} = x + 2y - 2z. \end{cases}$

93. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 3z, \\ \dot{y} = 4x + 10y - 12z, \\ \dot{z} = 3x + 6y - 7z. \end{cases}$

94. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z, \\ \dot{y} = -3x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -2x - 2y + 2z. \end{cases}$

95. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$

96. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 4y - z, \\ \dot{y} = -7x - 4y + 2z, \\ \dot{z} = -9x - 9y + 6z. \end{cases}$

97. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y + z, \\ \dot{y} = -5x + y - z, \\ \dot{z} = -3x - y + 2z. \end{cases}$

98. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = 2x - 2y - z, \\ \dot{z} = 3x + 2y - 5z. \end{cases}$

99. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y + z, \\ \dot{z} = 2x + 3y + z. \end{cases}$

100. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y + z. \end{cases}$

101. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x + 2y - 3z, \\ \dot{z} = -6x + 8y - 8z. \end{cases}$

102. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -3x + 3y - 6z. \end{cases}$

103. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - z, \\ \dot{y} = -6x - 6y + z, \\ \dot{z} = -4x - 2y - 2z. \end{cases}$

104. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y - z, \\ \dot{y} = 5x + 3y + z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 5z. \end{cases}$

105. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5y + 2z. \end{cases}$

106. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y - 2z, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2z, \\ \dot{z} = 7x + 4y + 5z. \end{cases}$

107. $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 6y - 4z, \\ \dot{y} = -8x + 14y - 4z, \\ \dot{z} = 4x + 13y + 2z. \end{cases}$

108. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 2z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = -4x + 2y - z. \end{cases}$

109. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y - 2z, \\ \dot{y} = x - 3y + z, \\ \dot{z} = 7x - 5y + 3z. \end{cases}$

110. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - z, \\ \dot{y} = -2x - 7y + 4z, \\ \dot{z} = -5x - 10y + 4z. \end{cases}$

111. $\begin{cases} \dot{x} = -8x + y - 5z, \\ \dot{y} = 18x - y + 10z, \\ \dot{z} = 11x - 7y + 10z. \end{cases}$

112. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y + z, \\ \dot{y} = 8x + 3y + 4z, \\ \dot{z} = -14x - 18y - 7z. \end{cases}$

113. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y - z, \\ \dot{y} = 8x + 4y + 4z, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 2z. \end{cases}$

114. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = 3x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 4x - 16y + 5z. \end{cases}$

115. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 6y + 12z, \\ \dot{z} = -8x - 8y + 6z. \end{cases}$

116. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 7z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + z, \\ \dot{z} = -7x - y - 4z. \end{cases}$

С помощью матричной экспоненты решить линейные однородные системы уравнений (117—136):

117. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

118. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

119. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

120. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

121. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$

122. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -x + 5y. \end{cases}$

123. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

124. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$

125. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

126. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

127. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y. \end{cases}$

128. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

129. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -5x + 3y. \end{cases}$ **130.** $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

131. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$ **132.** $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$

133. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x + 2y, \\ \dot{z} = 3z. \end{cases}$ **134.** $\begin{cases} \dot{x} = z + y, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = -x - z. \end{cases}$

135. $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$ **136.** $\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$

Решить линейные неоднородные системы уравнений (137—168):

137. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37\sin t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$ **138.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t, \\ \dot{y} = x - y - e^t. \end{cases}$

139. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 36t, \\ \dot{y} = -4x - 5y. \end{cases}$ **140.** $\begin{cases} \dot{x} = 11x - 8y + 4e^{7t}, \\ \dot{y} = 20x - 13y. \end{cases}$

141. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 30e^t, \\ \dot{y} = 15x - 6y + 45t. \end{cases}$ **142.** $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 9e^{2t}. \end{cases}$

143. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + 7e^{2t}, \\ \dot{y} = -9x - 7y + t^2 + 1. \end{cases}$ **144.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^{-t}. \end{cases}$

145. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$ **146.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 4y + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t. \end{cases}$

147. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 10y + 4\sin 2t, \\ \dot{y} = 4x + 6y. \end{cases}$ **148.** $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = -15x + 4y. \end{cases}$

149. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y + t + 1, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t. \end{cases}$ **150.** $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - e^{-t}, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 2e^t, \\ \dot{y} = -3x - 2y - 2e^t. \end{cases}$ **152.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t}. \end{cases}$

153. $\begin{cases} \dot{x} = y + \cos 2t - 2\sin 2t, \\ \dot{y} = -x + 2y + 2\sin 2t + 3\cos 2t. \end{cases}$ **154.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)e^t. \end{cases}$

155. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x - 2(t + 1)e^t. \end{cases}$ **156.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 5\sin t, \\ \dot{y} = 4x + y + 3\sin t - \cos t. \end{cases}$

157. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 5, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -2y + 2z. \end{cases}$ **158.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 3z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - 2z + 2e^{-t}. \end{cases}$

159. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t, \\ \dot{z} = x + y - 2z. \end{cases}$ **160.** $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y - 2z + \operatorname{ch} t, \\ \dot{y} = -x - y + 2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t, \\ \dot{z} = 6x - 2y + 2z - 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$

161. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z + \cos t, \\ \dot{y} = 5x - 4y + 3z + \sin t, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t. \end{cases}$ **162.** $\begin{cases} \dot{x} = x + z - 2\operatorname{ch} t + 3\operatorname{sh} t, \\ \dot{y} = -2x + 2y + 2z + 4\operatorname{sh} t, \\ \dot{z} = 3x - 2y + z - \operatorname{sh} t. \end{cases}$

163. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3z + 2e^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z - 2e^{2t}, \\ \dot{z} = x + y - 2z. \end{cases}$ **164.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z - 2e^t, \\ \dot{y} = -x + y + z + 2e^t, \\ \dot{z} = x - z - e^t. \end{cases}$

165. $\begin{cases} \dot{x} = -9x + 3y + 7z + 2, \\ \dot{y} = x + y - z + 4, \\ \dot{z} = -11x + 3y + 9z. \end{cases}$ **166.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t}, \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t}. \end{cases}$

167. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + t^2, \\ \dot{y} = -y - z + 2t, \\ \dot{z} = -z + t. \end{cases}$ **168.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t, \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2, \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2. \end{cases}$

Методом вариации постоянных решить линейные неоднородные системы уравнений (169—186):

169. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \dfrac{1}{1 + e^t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y - \dfrac{1}{1 + e^t}. \end{cases}$ **170.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \dfrac{e^t}{1 + e^t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + \dfrac{e^t}{1 + e^t}. \end{cases}$

171. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8y + \operatorname{tg} 4t, \\ \dot{y} = 4x - 4y. \end{cases}$

172. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 6y + \dfrac{1}{\cos^3 3t}, \\ \dot{y} = 3x - 3y. \end{cases}$

173. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + \dfrac{e^t}{\sin 2t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

174. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -4x + y + \dfrac{1}{te^t}. \end{cases}$

175. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -4x - y + \dfrac{e^t}{2\sqrt{t}}. \end{cases}$

176. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - \ln t, \\ \dot{y} = -4x - 2y + \ln t. \end{cases}$

177. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y + \dfrac{e^{3t}}{1 + e^{2t}}, \\ \dot{y} = 2x + 5y. \end{cases}$

178. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + \dfrac{e^{2t}}{1 + e^t}, \\ \dot{y} = 10x + 6y. \end{cases}$

179. $\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y - \dfrac{2}{\operatorname{ch} 2t}. \end{cases}$

180. $\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y, \\ \dot{y} = -15x + 4y + \dfrac{e^{-2t}}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$

181. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + \dfrac{3e^{2t}}{\cos^3 3t}, \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$

182. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y - \dfrac{3e^t}{\operatorname{ch} 3t}. \end{cases}$

183. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \dfrac{1}{1 + e^{-t}}, \\ \dot{y} = -3x - 2y - \dfrac{1}{1 + e^{-t}}. \end{cases}$

184. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t \ln t, \\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t \ln t. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \dot{x} = -8x - 4y, \\ \dot{y} = 20x + 8y - 4 \operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$

186. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 8x - 4y + \sqrt{t}. \end{cases}$

Решить операционным методом задачу Коши при $t \geqslant 0$ (187—197):

187. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

188. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

189. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

190. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -1.$

191. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-t}, \\ \dot{y} = x - 2y + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

192. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^t, \\ \dot{y} = x + 2y + 3e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

193. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + t, \\ \dot{y} = x - y + 2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

194. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3.$

195. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 3t + 6, \\ \dot{y} = -10x - y + 6t + 3, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

196. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

197. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

Решить каким-либо методом задачу Коши (198—224):

198. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

199. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + \dfrac{1}{2}y, \\ \dot{y} = -18x - 4y + 18te^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = \dfrac{1}{3},\ y(0) = 2.$

200. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 2y + 8te^{-t}, \\ \dot{y} = 8x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = \dfrac{1}{2}.$

201. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y + 9te^{5t}, \end{cases}$ $x(0) = \dfrac{1}{3},\ y(0) = 0.$

202. $\begin{cases} \dot{x} = 11x - 2y + 12te^{-t}, \\ \dot{y} = 18x - y, \end{cases}$ $x(0) = -\dfrac{2}{3},\ y(0) = 0.$

203. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y + 24e^t, \\ \dot{y} = -3x - 4y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

204. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 6t, \\ \dot{y} = -4x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

205. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = x - 3y - 36e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -6.$

206. $\begin{cases} \dot x = 4x - y, \\ \dot y = x + 2y + 2e^{3t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

207. $\begin{cases} \dot x = -2x - y + 37\sin t, \\ \dot y = -4x - 5y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1.$

208. $\begin{cases} \dot x = 3x + 2y + (1-4t)e^{-t}, \\ \dot y = -2x - 2y + 2te^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -1.$

209. $\begin{cases} \dot x = 3x - 5y - 2e^{t}, \\ \dot y = x - y - e^{t}, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

210. $\begin{cases} \dot x = 2y - 2z, \\ \dot y = x - y - z, \\ \dot z = -x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

211. $\begin{cases} \dot x = x - y + z, \\ \dot y = y - x + z, \\ \dot z = 3z - x - y, \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

212. $\begin{cases} \dot x = y - z, \\ \dot y = -y + z, \\ \dot z = x - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

213. $\begin{cases} \dot x = x - z, \\ \dot y = y + z, \\ \dot z = -x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

214. $\begin{cases} \dot x = x - y, \\ \dot y = x + z, \\ \dot z = x + z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = z(0) = 1.$

215. $\begin{cases} \dot x = x - 2y + z, \\ \dot y = -y + z, \\ \dot z = x - y - z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

216. $\begin{cases} \dot x = x - 3y + z, \\ \dot y = x - 2y, \\ \dot z = y - z, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

217. $\begin{cases} \dot x = 2y + z, \\ \dot y = x + z, \\ \dot z = -y - z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

218. $\begin{cases} \dot x = -2y + 2z, \\ \dot y = x - y + z, \\ \dot z = y - z, \end{cases}$ $x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 1.$

219. $\begin{cases} \dot x = x - 2y. \\ \dot y = -x - y - 2z, \\ \dot z = y + z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

220. $\begin{cases} \dot x = 2x - y + z + 8, \\ \dot y = y + z, \\ \dot z = -x + y + z, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

221. $\begin{cases} \dot x = 2x - y + z + 1 - e^{-t}, \\ \dot y = 2x - y - 2z + 1, \\ \dot z = -x + y + 2z - 1 + e^{-t}, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

222. $\begin{cases} \dot x = 2x - y + 2z, \\ \dot y = x + 2z, \\ \dot z = -2x + y - z + 1, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 0.$

223. $\begin{cases} \dot x = x - 2y - z + 1, \\ \dot y = -x + y + z, \\ \dot z = x - z + 1, \end{cases}$ $x(0) = z(0) = 1,\ y(0) = 0.$

224. $\begin{cases} \dot x = 2x + y + e^{2t}, \\ \dot y = 2y + 4z - 4e^{-t}, \\ \dot z = x - z, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

225. Найти все решения системы, стремящиеся к нулю при $t \to -\infty$:

$$\begin{cases} \dot x = 3x + y - 3z, \\ \dot y = -7x - 2y + 9z, \\ \dot z = -2x - y + 4z. \end{cases}$$

226. Найти все решения системы, ограниченные при $t \to +\infty$:

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, \\ \dot x_2 = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4, \\ \dot x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4, \\ \dot x_4 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

227. Показать, что решение системы уравнений $\dot x_1 = -a^2 x_2$, $\dot x_2 = x_1$ при каждом из граничных условий: 1) $x_1(0) = 0$, $x_1(T) = b$, 2) $x_1(0) = 0$, $x_2(T) = b$, 3) $x_2(0) = 0$, $x_1(T) = b$, 4) $x_2(0) = 0$, $x_2(T) = b$ в зависимости от выбора параметров a, b и $T > 0$ либо существует и единственно, либо существует и неединственно, либо не существует.

228. Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot x - 8x + \sqrt{6}\dot y = 0, \\ \ddot y - \sqrt{6}\dot x + 2y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 1$, $y(0) = \dot y(0) = \dot x(0) = 0$.

229. Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot x - \dot y + \dot z - 4x - 2y - 2z = \sin 2t, \\ 2\dot x - \ddot y + \ddot z + 3y - 4z = 0, \\ \dot x + \ddot z - 2x - y - 4z = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

230. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Доказать, что $e^{tA} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$.

231. Пусть квадратная матрица второго порядка A имеет собственные значения λ_1, λ_2 и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t}\cdot E + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 E),$$

где E — единичная матрица второго порядка.

232. Пусть квадратная порядка n матрица A имеет собственное значение λ_0 кратности n. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t}\left[E + \frac{t}{1!}(A - \lambda_0 E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_0 E)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda_0 E)^{n-1}\right],$$

где E — единичная матрица порядка n.

233. Пусть λ — собственное значение квадратной матрицы A и пусть h — соответствующий ему собственный вектор A. Доказать, что тогда e^{λ} — собственное значение матрицы e^A, а h — соответствующий ему собственный вектор e^A.

234. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения квадратной матрицы A (с учетом их кратности). Доказать, что определитель $\left|e^{tA}\right|$ матрицы e^{tA} удовлетворяет равенству $\left|e^{tA}\right| = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}$.

235. Доказать, что матричные ряды для $\sin A$ и $\cos A$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}A^{2k}$$

сходятся для любой квадратной матрицы A.