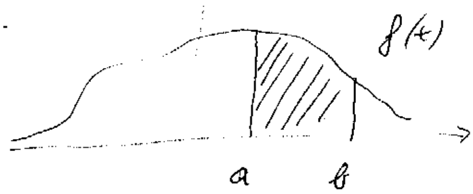
idEje: pravd., náhodné veličina; minule & konvoluce; „Gaussův klobouk".

X … náhodná veličina (reálná) … hustota: $f(x): \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$\Pr\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \boxed{f \geq 0; \int_{\mathbb{R}} f = 1.}$$

obecněji: $\Pr\{X \in A\} =$

heuristicky: $\Pr\{a < X < a+\varepsilon\} \doteq f(a)\varepsilon.$

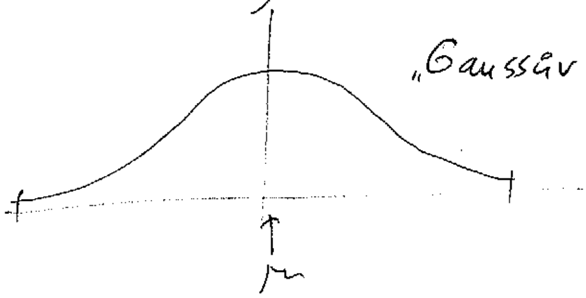


Příklady:

(1) X .. náhodné číslo na $[0, K]$ .. hustota $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{K}; & x \in (0,K) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$

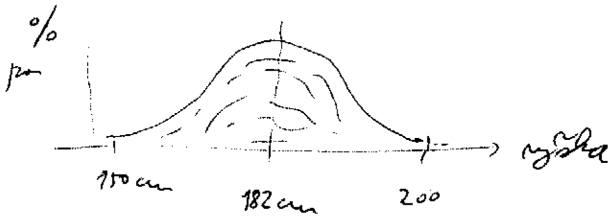
(2) hod kostkou: .. hustota $f(x) = \frac{1}{6}(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_6).$

(3) Gaussovo normální rozdělení: $N(0,1)$ .. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



„Gaussův klobouk"

— vyskytuje se velmi často; $\boxed{\text{proč??}}$



Věta [centrální limitní věta.]

$X_1, X_2, \dots$ náhodné veličiny, nezávislé, stejně rozdělené.

střední hodnota $EX_i = 0$
rozptyl $= 1$

Potom $\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \to N(0,1)$

„v určitém smyslu"   idea: náhodné zprůměrování

Pozn.: $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow 0$ (hustota $\delta_0 = EX_i$)

X … náhodná veli. $E\varphi(X)$ … střední (očekávaná) hodnota $\varphi(X)$.

$\varphi(\cdot)$ funkce

~~E~~ ~~zlat~~: $f(x)$ … hustota X

$$E\varphi(X) = \int \varphi(x) f(x)\,dx .$$

spec.: $EX = \int x f(x)\,dx$ … střední hodnota X

$\sigma^2 = \operatorname{var} X = E\left(X - EX\right)^2$ … „rozptyl"

$= E(X^2) - (EX)^2$ jak moc je X rozložené od střední hodnoty.

δ_0 … rozptyl je 0

(= „rozmazanost" $f(x)$).

$$\operatorname{var} X = \int (x - EX)^2 f(x)\,dx = \int x^2 f(x) - (EX)^2 .$$

Pozn.: $Y_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ …

$$\boxed{\begin{aligned} EY_n &= \cancel{0}\, n \cdot EX_1 = 0 \\ \operatorname{var} Y_n &= 1 . \end{aligned}}$$

~~nezávislé~~

Def.: X, Y jsou nezávislé: pro $\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\Pr\left(\{X \in A\} \,\&\, \{Y \in B\}\right) = \Pr\left(\{X \in A\}\right) \cdot \Pr\left(\{Y \in B\}\right).$$

(pomocné věci)

~~Tvrzení~~ **Lemma** 1. X ... hustota $f(x)$ $(c>0)$

$c\cdot X$ ... hustota $\frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right)$

2. X, Y ... nezávislé, hustoty $f(x), g(x)$

$\Rightarrow$ $X+Y$ má hustotu $f * g(x)$.

---

dk: $(c>0)$: 1. $\Pr\{a < cX < b\} = \Pr\left\{\frac{a}{c} < X < \frac{b}{c}\right\}$

$$= \int_{a/c}^{b/c} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{y}{c}\,;\ y \in (a,b) \\ y = x\cdot c \end{array} \right.$$

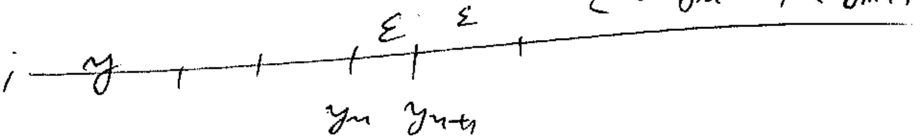
$$= \int_a^b \frac{1}{c} f\left(\frac{y}{c}\right) dy \Rightarrow \quad \frac{1}{c} f\left(\frac{\cdot}{c}\right) \text{ – hustota } cX.$$

2. heuristika $\Pr\{a < X < a+\varepsilon\} \doteq f(a)\,\varepsilon$ % případě...

ε – malé!

$$\Pr\{a < X+Y < a+\varepsilon\} \doteq \sum_n \Pr\left(\{y_n < X < y_{n+1}\} \,\&\, \{a-y_n < Y < a-y_{n+1}\}\right).$$

$\{y_n\}$ pomocné body;



$$= \sum_n \Pr\left(\{y_n < X < y_n+\varepsilon\}\right)\cdot \Pr$$

$$= \sum_n f(y_n)\,\varepsilon\; g(a-y_n)\,\varepsilon$$

$$\doteq \varepsilon \underbrace{\int f(y)\,g(a-y)\,dy}_{\text{hustota } f\, X+Y.}$$

Exempla:

„Důkaz" CLV: $Y_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$; $Z_n = X_1+\dots+X_n$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n$$

X_i … hustota $f(x)$.

Z_n … hustota $f_n = \underbrace{f*f*\dots*f}_{n\text{-krát}}$.

$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n$ … hustota $g_n = \sqrt{n}\, f_n(\sqrt{n}\, x)$.

?? $g_n \cancel{(x)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \gamma(x)$

ověření, že $\hat{g}_n \to \hat{\gamma}$ (F … prosté, a to zajistí dává konvergence..)

$$[\widehat{g_n(x)}](\xi) = \hat{f}_n\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = (\hat{f})^n\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left[\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[\hat{f}(0) + (\hat{f})'(0)\cdot\frac{\xi}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^2 (\hat{f})''(0) + \dots\right]^n$$

$$(\hat{f})'(\xi) = [-2\pi i x f(x)]^\wedge(\xi) =$$

$$(\hat{f})^{(m)}(\xi) = [(-2\pi i)^m f(x)]^\wedge(\xi) \quad \Big|_{\xi=0}$$

$$(\hat{f})^{(1)}(0) = -2\pi i \int x f(x)\,dx = 0 \quad (\text{střední } EX=0)$$

$$(\hat{f})^{(2)}(0) = (-2\pi i)^2 \underbrace{\int x^2 f(x)\,dx}_{1} = -4\pi^2 \quad (\text{var } X = 1)..$$

obecně: $(\hat{f})^{(n)}(0) = (-2\pi i)^n \int x^n f(x)\,dx$

$= \left[1 + \frac{-2\pi^2\xi^2}{n} + \cdots\right]^n \longrightarrow e^{-2\pi^2\xi^2} = \hat{\mu}(\xi).$

el. limita $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$.

$(\hat{f})^{(n)}(\xi) = \left[(-2\pi i)^n x^n f(x)\right]^{\wedge}(\xi) \quad / \ \xi = 0$

$= (-2\pi i)^n \int x^n f(x)\, e^{-2\pi i \xi x}\,dx$

$\frac{X_1 + \dots X_n - nEX}{\sqrt{n}\,\mathrm{var}\,X} \longrightarrow N(0,1)$

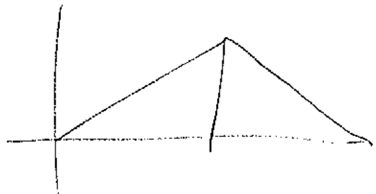
vhodná normalizace

BÚNO. $EX = 0$

$\mathrm{var}\,X = 1$.

Př: ① $\cancel{\frac{1}{k^2}}$ $(f*f)(x) = \int_0^k f(y)\, f(x-y)\,dy$

$(0,1]$: $(f*f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,\underline{f(y)\,dy} = \int_0^1 f(x-y)\,dy$



$x<0$: $f*f = 0 \quad (x-y < x < 0)$

$x>2$: $f*f = 0 \quad (x-y > 2-1 > 1)$

$x \in (0,1)$: $f(x-y) = \begin{cases} 1; & y \in (0,x) \\ 0; & y \in (x,1) \end{cases} \Rightarrow f*f = x$

$x \in (1,2)$: ... $\qquad 2 - x$.

$$(\delta_0+\delta_1) * (\delta_0+\delta_1) = \tfrac{1}{4}(\delta_0 + \delta_1 + \delta_1 + \delta_2).$$

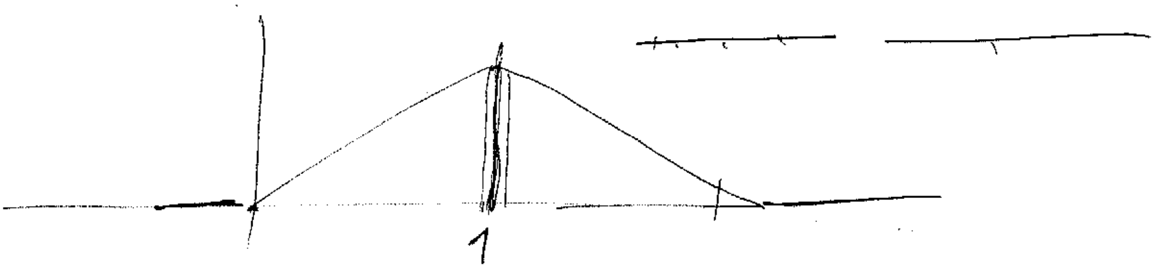
$$f * \delta_a = \int f(y)\,\delta_a(x-y)\,dy = \int f(x-y)\,\delta_a(y)\,dy = f(x-a)$$

$$\underline{\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}}.$$

$$\int\left(\int \varphi(x+y)\,d\delta_a(x)\right) d\delta_b(y) = \int \varphi(a+y)\,d\delta_b(y)$$
$$= \varphi(a+b) = \delta_{a+b}(y).$$

$\delta_a * \delta_b$

$f(x) = (0,1)$ $\quad x = (0,1)$; $2-x \sim (1,2)$ a 0 jinde



$EX = 1/2$

$E(X+Y) = 1$