DFT funguje v $\mathbb{C}^N$; kde $z \in \mathbb{C}^N$ chápeme jako funkci $z: \{0, 1, \dots N-1\} \to \mathbb{C}$

$$z = (z(0), z(1), \dots z(N-1)).$$

skalární součin: $\langle z, w \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \overline{w(n)}$.

DFT není nic jiného než přechod z Fourierově báze $\{F_m\}_{m=0}^{N-1}$; $F_m = (F_m(0), \dots F_m(N-1))$,

kde $F_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(2\pi i \frac{mn}{N}\right)$; $m, n = 0, \dots N-1$.

<u>Tvrzení</u>: $\{F_m\}_{m=0}^{N-1}$ je ON báze $\mathbb{C}^N$.

<u>Dk.</u>: návod: $\langle F_m, F_k \rangle$ je součet řady $\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} Q^n = \frac{1-Q^N}{1-Q}}$, a $Q^N = 1$.

klíčový vztah pro všechny další výpočty...

Definice <u>DFT</u>: $z \in \mathbb{C}^N$ definuji $\hat{z} \in \mathbb{C}^N$

$$\hat{z}(m) = \langle z, F_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot \exp\left(-2\pi i \frac{mn}{N}\right) \cdot \frac{1}{N}.$$

$m = 0, \dots N-1$

Úloha: $\hat{R} = ?$, kde $R = (j+1, j+2, \dots j+n)$.

$$R = j(1, \dots 1) + \underbrace{(1, 2, \dots n)}_{w}.$$

modré

$$N \hat{w}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) Q^n, \quad \text{kde } Q = \exp\left(-2\pi i \frac{m}{N}\right)$$

trik

$$\begin{aligned} &= 1 + Q + \dots + Q^{N-1} && = S_0 \\ & + Q + \dots + Q^{N-1} && = S_1 \\ & + Q^2 \dots + Q^{N-1} && \\ & Q^{N-1} && = S_{N-1} \end{aligned}$$

obecněji $S_k = \dfrac{Q^k(1-Q^{N-k})}{1-Q} = \dfrac{1}{1-Q}\left(Q^k - Q^N\right)$;

tedy $$\sum_{k=0}^{N-1} S_k = \frac{1}{1-Q}\left(\frac{1-Q^N}{1-Q} - NQ^N\right).$$