Besselovy funkce.

Besselovy funkce 1. druhu, řádu $s \in \mathbb{R}$, lze definovat pro $x > 0$ například takto:

$$J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n\,!\,\Gamma(n+s+1)}\,, \quad \text{s konvencí } \frac{1}{\Gamma(-n)} = 0 \text{ pokud } s \in \mathbb{Z},\ s < 0\,.$$

Speciálně pro $k = 1, 2, 3, \dots$ tedy platí:

$$J_{-k}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n\,!\,\Gamma(n-k+1)}\,. \tag{1}$$

Platí, že $J_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ pro $s \geq 0$ celočíselná (kde symbol $\mathcal{H}$ značí holomorfní funkce), $J_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ pro $s < 0$ celočíselná (to z definice (1)), ovšem lze je dodefinovat na funkce holomrfní všude, vztahem (2) níže. Celkem tedy $J_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ pro $s \in \mathbb{Z}$, a dále $J_s \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A_{0,\infty})$ pro s neceločíselná, kde $A_{0,\infty}$ je jakákoli uzavřená polopřímka, vycházející z počátku (je to kvůli obecné mocnině $\left(\frac{x}{2}\right)^s$, skrývající v sobě logaritmus).

Besselovy funkce $J_s(x)$ a $J_{-s}(x)$ řeší Besselovu obyčejnou diferenciální rovnici řádu s (uvažujeme ji separátně na $x > 0$ a $x < 0$):

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0\,, \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

Přitom:

$J_s(x) \approx x^s$ na $(0, \delta)$ pro $s \notin \{-1, -2, \dots\}$, a tedy J_s a J_{-s} jsou pro $s \notin \mathbb{Z}$ lineárně nezávislá řešení Besselovy rovnice a tvoří tedy její fundamentální systém;

(2) $J_{-k}(x) = (-1)^k\, J_k(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, a jsou tedy lineárně závislá.

[*Pro zajímavost:* Lze ukázat, že pro $k \in \mathbb{N}$ je fundamentální systém Besselovy rovnice tvořen dvojicí $\{J_k(x), Y_k(x)\}$, kde $Y_k(x)$ je tzv. Besselova funkce 2. druhu (též Neumannova nebo Weberova funkce), kterou lze definovat různě, například předpisem:

$$Y_n(x) := \lim_{s\to n} \frac{J_s(x)\, \cos(s\pi) - J_{-s}(x)}{\sin(s\pi)}\,.]$$

Pro $s = n + \frac{1}{2}$, $s = -n - \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, lze Besselovy funkce vyjádřit explicitně:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)\,,$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)\,,$$

kde symbol "$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n$" znamená "opakuj n-krát po sobě operace derivování a dělení x". Speciálně platí:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,.$$

Obecně se ukazuje, že tuto vlastnost „tlumeného kmitání“ mají asymptoticky všechny Besselovy funkce:

$$J_s(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}(s+\frac{1}{2})\right)}{\sqrt{x}} \qquad \text{pro } s \in \mathbb{R},\ x \gg 1\,.$$

Mezi důležité identity patří dále ($a > 0, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

$$e^{\frac{a}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) z^n\,, \quad e^{ia\sin t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) e^{int}\,,$$

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(a\sin t - nt)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(a\sin t - nt)\,dt\,.$$

Některé užitečné rekuretní identity:

$$(x^s J_s(x))' = x^s J_{s-1}(x)\,, \qquad \left(x^{-s} J_s(x)\right)' = -x^{-s} J_{s+1}(x)\,,$$

speciálně $J_0' = -J_1 = J_{-1}$; dále

$$J_{s+1}(x) + J_{s-1}(x) = \frac{2s}{x} J_s(x)\,, \qquad (x \neq 0)\,,$$

případně další (zkuste si vše dokázat z vyjádření Besselových funkcí řadou):

$$\begin{aligned} 2J_s'(x) &= J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x)\,,\\ xJ_s'(x) &= sJ_s(x) - xJ_{s+1}(x)\,,\\ xJ_s'(x) &= -sJ_s(x) + xJ_{s-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Laplaceovy transformace Besselových funkcí celočíselného řádu jsou elementární funkce:

$$\mathcal{L}(J_n(at)) = \frac{a^n}{\sqrt{p^2+a^2}(p+\sqrt{p^2+a^2})^n} \qquad a > 0,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Pomocí výše uvedeného vztahu lze snadno ukázat tzv. rekurentní formuli pro Besselovy funkce (všechny funkce v tomto vztahu uvažujeme nulové pro záporná x):

$$J_{n+1}(at) = J_n(at) * \frac{1}{t} J_1(at)\,.$$