1. Vypočítejte $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$

(a)
$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

(b)
$$\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

(c)
$$\frac{1}{x^2+y^4}$$

(d)
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

(e)
$$\frac{x^2y}{x^2+y^4}$$

(f)
$$(x^2+y^2)^{xy}$$

2. Vypočítejte $\lim_{(x,y)\to\infty}$

(a)
$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

(b)
$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

(c)
$$\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$$

(d)
$$\frac{1}{1+x^2}$$

3. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál funkcí:

(a) $x^4+y^4+4xy^2$

(b) $x\sin(x+y)$

(c) $\ln(x^2+y^2)$

(d) x^y

(e) $\frac{x}{y}$

(f) $\frac{ax+by}{cx+dy}$ ($abcd$ jsou konstanty).

4. U všech funkcí sub 3 ověřte záměnnost druhých parciálních derivací.

Heineho věta: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ právě když pro každou

posloupnost $\{a_n\}$, splňující: $a_n \to a$

$a_n \neq a \ \forall n$ platí:

$f(a_n) \to A$.

v příkladech $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$;

volíme $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ atd.

Fakt: každou posloupnost $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^2$; splňující

$a_n \to (0,0)$

$a_n \neq (0,0) \ \forall n$

lze psát ve tvaru $a_n = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$;

kde: $r_n > 0$; $r_n \to 0$

$\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ je libovolné.

(1a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$: $a_n = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$

$r_n \to 0$; $r_n > 0$

$\{\varphi_n\}$ libovolné.

$f(a_n) = \frac{\sin r_n^2}{r_n^2} \to 1$

$\boxed{\text{výsledek: } 1}$

(1b) $f(a_n) = \frac{\ln(1+r_n^2)}{r_n^{2/3}} = \underbrace{\frac{\ln(1+r_n^2)}{r_n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{r_n^{\frac{4}{3}}}_{\to 0} \to 0$

$\boxed{\text{výsledek: } 0}$

(1c) $x^2+y^4 \to 0$; $(x,y) \to (0,0)$

$x^2+y^4>0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^4} \to +\infty .$$

(1d) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$; $\to$ $\boxed{\text{výsledek: } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \ \nexists}$

$a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$: $f(a_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+0} = 1$

$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$: $f(a_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$

(1e) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4}$.

$x=0$: $f(x,y)=0$

$x\neq 0$: $|f(x,y)| = \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^4} \leq \dfrac{x^2|y|}{x^2} = |y|$;

$\rightsquigarrow \quad |f(x,y)| \leq |y|$ pro $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$\rightsquigarrow \quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 .$

(1f) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{xy} = \exp\left(xy\cdot \ln(x^2+y^2)\right) = \exp\left(h(x,y)\right)$.

$a_n = r_n(\cos\varphi_n, \sin\varphi_n)$; $h(a_n) = r_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n \ln r_n^2$

$|h(a_n)| \leq r_n^2 \ln r_n^2 \to 0$; $n\to\infty$ $\left(r_n \to 0;\ r_n>0\right)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \exp(0) = 1.$

Heine-varianta: $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{a_n\}$, splňující $a_n \to \infty$, platí:

$$f(a_n) \to A.$$

$a_n \to \infty$: $\forall R > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n\| > R$.

v případě $\mathbb{R}^2$ lze každou posloupnost $a_n \to \infty$ psát ve tvaru $a_n = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$

$r_n \to +\infty$

$\{\varphi_n\} \subset \mathbb{R}$ je libovolná!

(2a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; a_n ... jako výše.

$$f(a_n) = \frac{r_n^2}{r_n^4(\cos^4\varphi_n + \sin^4\varphi_n)} = \frac{1}{r_n^2} \cdot G(\varphi_n);$$

$$G(\varphi) = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$$ ... stačí ukázat, že $G(\varphi)$ je shora omezená v $\mathbb{R}$.

$\to |f(a_n)| \leq \frac{1}{r_n^2} \cdot C \to 0$; $n \to \infty$ ($r_n \to +\infty$).

$G(\varphi)$ je 2π-periodická: stačí omezenost na $[0, 2\pi]$;

→ plyne ze spojitosti (čitatel vždy > 0)

$\boxed{\text{Výsledek: } 0}$

(2b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$; a_n … jako výše.

$$f(a_n) = \frac{r_n(\cos\varphi_n + \sin\varphi_n)}{r_n^2(1 - \cos\varphi_n \sin\varphi_n)} ;$$

protože : $|\cos\varphi| \le 1$

$|\sin\varphi| \le 1$

$|\cos\varphi \sin\varphi| = \left|\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right| \le \frac{1}{2}$

$$|f(a_n)| = \frac{1}{r_n} \cdot \frac{|\cos\varphi_n| + |\sin\varphi_n|}{1 - |\cos\varphi_n \sin\varphi_n|} \le \frac{1}{r_n} \cdot \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} \to 0.$$

$\boxed{\text{výsledek: } 0.}$

(2c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$;

$a_n = (n, 0)$: $f(a_n) = \dfrac{n^2}{n^4} = \dfrac{1}{n^2} \to 0$

$a_n = (0, n)$: $f(a_n) = \dfrac{n^4}{n^2} = n^2 \longrightarrow +\infty.$

$\boxed{\text{výsledek: } \lim \nexists}$

(2d) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $a_n = (n, 0)$: $f(a_n) \to 0$

$a_n = (0, n)$: $f(a_n) \equiv 1.$

$\to \boxed{\lim \nexists}.$

Tento příklad ukazuje, že $(x,y) \to \infty$

obecně neimplikuje $x \to \infty$ (ani $y \to \infty$).