Série 2 - termín čtvrtek 6. března 2025

① Ukažte, že pro každé nenulové $a \in Z_2[x]$ existuje $\tilde{a}$ takové, že $a \otimes \tilde{a} = 1$.

② [Exercise 19.] Množina B je uzavřená, právě když z ní nelze vykonvergovat, tj. platí implikace: $b_n \in B$, $b_n \to b \implies b \in B$. Dokažte.

③ Zformulujte ekvivalentní definici otevřenosti množiny, založenou pouze na pojmu limity posloupnosti.

④ [Exercise 21.] Ukažte, že kompaktnost je tzv. uzavřeně dědičná vlastnost: je-li K kompaktní a $L \subset K$ uzavřená množina, je také L kompaktní (vše je míněno vzhledem danému metrickému prostoru (M, d)).

⑤ Ukažte, že otevřený interval (a, b) je otevřená množina a uzavřený interval $[a, b]$ je uzavřená množina (míněno v $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou).

⑥ Nechť (M, d) je diskrétní metrický prostor, tj. M je libovolná množina a $d(x, y) = 0$ resp. 1 pokud $x = y$ resp. $x \neq y$. Ukažte, že libovolná funkce $f : M \to N$ do libovolného metrického prostoru (N, e) je spojitá.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) *BÚNO (proč?)* $a = 1 \oplus \alpha$ *a užijeme* $(1-\alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$ *(konvergence?)*

ad 2) *Obě implikace nejlépe dokazovat nepřímo: (i) není-li* B *uzavřená, pak* $A = B^c$ *není otevřená, tedy existuje* $a \in A$ *takové, že* $\dots$*. Odsud (podobně jako v Heineho větě) najdu posloupnost* $b_n \in B$, $b_n \to a \notin B$. *(ii) pokud* B *je uzavřená, je* $A = B^c$ *otevřená. Negace implikace ve druhé části věty pak vede ke sporu.*

ad 3) *Mělo by vyplynout z předchozího příkladu.*

ad 4) *Přímočarý důkaz + příklad 2.*

ad 5) *K uzavřenosti možno využít příklad 2 a větu o zachování nerovnosti v limitě.*

ad 6) *Uvažte, jak v diskrétním prostoru vypadají okolí* $B(x, 1/2)$.