Série 3 - termín čtvrtek 13. března 2025

1 Ukažte, že interval $I = [0, 0.\overline{1}] \subset Z_2[x]$ je nesouvislá množina.
Ukažte obecněji, že I je diskontinuum, tj. je nesouvislý mezi libovolnými dvěma body.

2 [Dle Exercise 13, Lecture 3.] Ukažte, že množina $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{0\} \times [-1, 1] \\ M_2 &= \{(t, \sin(1/t));\ 0 < t \leq 1\} \end{aligned}$$

není křivkově souvislá v $\mathbb{R}^2$.

3 Nechť (X, d) je metrický prostor, nechť $M \subset X$ je libovolná množina.
(i) Ukažte, že $A \subset M$ je otevřená v M, právě když existuje $\tilde{A} \subset X$ otevřená v X taková, že $A = \tilde{A} \cap M$.
(ii) Zformulujte a dokažte analogické kritérium pro uzavřenost.

4 [Exercise 23, Lecture 3.] Odvoďte elementárně vzorečky pro druhou odmocninu v $\mathbb{C}$.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) Ukažte, že $I = I_1 \cup I_2$, kde $I_{1,2}$ jsou disjunktní, neprázdné, obojetné.

Dále užijte samopodobnost („fraktální strukturu") I, založenou na zobrazeních typu $a \mapsto \big(a \otimes 2^{-n}\big) \oplus 2^{-m}$.

ad 2) Ukažte (sporem), že neexistuje křivka spojující M_1 a M_2.

ad 3) (i) Je-li $B_M(a, \delta)$ okolí v M, $B(a, \delta)$ okolí v X, pak $B_M(a, \delta) = B(a, \delta) \cap M$.

(ii) Uvažujte doplňky.

ad 4) Viz nápověda na konci třetí přednášky.