Série 4 - termín čtvrtek 20. března 2025

① Ukažte, že uzavřená jednotková koule v prostoru $C([0,1])$ (tj. spojitých funkcí $f : [0,1] \to \mathbb{R}$) není kompaktní (vůči normě $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}$.

② [Dle Exercise 13, Lecture 4.] Rozhodněte, zda platí následující výroky (tj. buď dokažte, nebo najděte protipříklad.)

1. úplná množina je uzavřená
2. sjednocení dvou úplných množin je úplné (platí pro nekonečná sjednocení?)
3. průnik dvou úplných množin je úplný (platí pro nekonečné průniky?)
4. úplná množina je omezená
5. konečná množina je úplná
6. nekonečný diskrétní metrický prostor je neúplný

③ [Exercise 7, Lecture 4] Ukažte, že každý polynom $\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ lze napsat ve tvaru $\sum_{j=0}^{n} b_j (z-u)^j$, kde u je dané (komplexní) číslo.

④ [Exercise 11 a 12, Lecture 4] Ukažte, že kompaktní prostor je úplný. Najděte protipříklad, že obrácená implikace neplatí.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) Sestrojte posloupnost funkcí f_n, splňující $\|f_n - f_m\| = 1$ pro všechna $m \neq n$ následovně: zvolte disjunktní intervaly $I_n \subset [0,1]$ a definujte (stačí načrtnout) f_n tak, aby byla nula mimo I_n a nabývala maxima $|f| = 1$ uprostřed I_n.

ad 3) Uvažte, že $z = (z - u) + u$ a použijte binomickou větu.