Série 5 - termín čtvrtek 27. března 2025

① Ukažte, že úplnost $\mathbb{R}$ implikuje axiom suprema.

② Definujeme vzdálenost bodu a od množiny B jako

$$d(a,B) = \inf\{d(a,b);\ b \in B\}$$

obecněji, vzdálenost množin A, B jako

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$$

Předpokládejte, že B je uzavřená množina. Ukažte, že:
(i) $d(a,B) = 0$ právě když $a \in B$;
(ii) obecněji, je-li A kompaktní, pak $d(A,B) = 0$ právě když $A \subset B$
(iii) Ukažte, že předpoklady nelze oslabit: existují (dokonce uzavřené) disjunktní A, B takové, že $d(A,B) = 0$.

③ Nechť $f : X \to D$ je spojité zobrazení, přičemž D je diskrétní prostor (tj. obecně řečeno, jednobodové množiny jsou v D otevřené).
Ukažte, že f je nutně konstantní na souvislých podmnožinách X (speciálně, je tedy konstantní na komponentách X).

④ Nechť $Q \subset P$ je hustá v P, nechť $P \subset X$ je hustá v X. Potom Q je hustá v X.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, shora omezená. BÚNO M nemá největší prvek (jinak jsme hotovi - proč?) Zvolme $b_1 < a_1$ takové, že a_1 je horní odhad M, zatímco b_1 není horní odhad M.

Dále postupuji indukcí: polož $c_n = (a_n + b_n)/2$. Pokud c_n je horní odhad, kladu $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$, v opačném případě ...

Posloupnost a_n je cauchyovská, tedy díky úplnosti má limitu, která je horní odhad a musí to být nejmenší horní odhad (proč?).

ad 2) (i) Vyjděte z toho, že pokud $\inf M = 0$, existují $y_n \in M$ tak, že $y_n \to 0$.

(iii) Uvažte vhodné (neomezené) křivky v rovině

ad 3) Tedy jednobodové množiny jsou v D obojetné a jejich vzory ... (viz Exercise 4, Lecture 3).

ad 4) Pro dané $x_0 \in X$ existují (z hustoty P) body $p_n \in P$ takové, že $p_n \to x_0$. Ty vhodně nahradím blízkými body $q_n \in Q$, díky hustotě Q v P.