Série 6 - termín čtvrtek 10. dubna 2025

① Nechť řada $\sum_k a_k$ konverguje. Ukažte, že potom $a_n \to 0$ a také $b_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \to 0$ pro $n \to \infty$.

② Rozhodněte (a také odůvodněte), zda konvergují následující řady:

(i) $\sum_k 1/k$

(ii) $\sum_k 1/k^2$

(iii) $\sum_k \sin(k\pi/100)$

*(iv) $\sum \frac{k!}{k^{k+p}}$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

③ Je dána funkce $\varphi : t \mapsto (x, y)$ předpisem

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(3^{2k}t)}{2^k}$$
$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(3^{2k+1}t)}{2^k}$$

kde pomocná funkce ψ je definována jako

$$\psi(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0, 1/3] \\ 3u - 1, & u \in (1/3, 2/3) \\ 1, & u \in [2/3, 1] \end{cases}$$

a dále je sudá a 2-periodická. (Viz též obrázek.)

Na cvičení bylo ukázáno, že $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ je spojitá.
Ukažte, že φ zobrazuje interval $[0, 1]$ na čtverec $[0, 1]^2$. Podrobněji, ukažte že:

(i) pro $t \in [0, 1]$ je $x(t)$, $y(t) \in [0, 1]$

(ii) pro každou dvojici x, $y \in [0, 1]$ existuje $t \in [0, 1]$ takové, že $\varphi(t) = (x, y)$.

④ Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi/2, & x \in (-\pi, 0) \\ \pi/2 - x, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Načrtněte její graf v intervalu $(-\pi, \pi)$ a spočítejte Fourierovy koeficienty.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) Označme $s_n := \sum_{k=1}^{n}$. Potom z konvergence řady víme, že $s_n \dots$. Vyjádřete a_n, b_n pomocí s_n.

ad 3) x (a podobně y) lze napsat ve dvojkovém rozvoji $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/2^i$, kde $x_i \in \{0, 1\}$. Ve trojkovém rozvoji $t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i/3^i$, kde $t_i \in \{0, 1, 2\}$. Jak souvisí $\psi(t)$ s číslicí t_1?

ad 4) $a_k = 0$ (proč?)