Série 7 - termín čtvrtek 17. dubna 2025

① Nechť $f(x) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Dokažte tzv. Poincarého nerovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \overline{f}|^2 \, dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx$$

kde $\overline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$. Pro jaké funkce nastává rovnost?

② [Exercise 11, Lec 8] Ukažte, že

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

③ [Exercise 12, Lec 8] Ukažte slabší verzi Stirlingova odhadu, tj.

$$S(n) \approx n \log n - n + \mathcal{O}(\log n) \qquad n \to \infty$$

kde $S(n) = \log(n!)$.

④ [Zobecnění Ex 14, Lec 8]. Nechť $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ jsou dané vektory, splňující

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_j|,\ j = 1, \ldots, n\} \leq A \tag{1}$$

$$\|b\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |b_j| \leq B \tag{2}$$

Ukažte, že platí odhad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| \leq AB$$

kde $\langle a, b\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) Předpokládejte, že $f(x)$ lze napsat jako součet Fourierovy řady. Uvažte vztah k $\overline{f}$ a také k řadě pro $f'(x)$. Pomocí Parsevalovy rovnosti reformulujte problém v termínech koeficientů a_k, b_k.

ad 3) Odhadněte $S(n) = \sum_{j=2}^{n} \log j$ pomocí integrálu funkce $\log(x)$ na vhodném intervalu. Ideálně, odvoďte rigorózní horní a dolní odhady.

ad 4) Uvažte, že $|a_j b_j| \leq A|b_j|$ pro každé j.