Série 8 - termín čtvrtek 24. dubna 2025

① Ukažte, že funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ není holomorfní na žádné (otevřené) podmnožině $\mathbb{C}$.

② [Převedení elementárních funkcí v $\mathbb{C}$ na logaritmus a exponenciálu.]
(i) Ukažte, že funkce $\sin z$ a $\cos z$ lze vyjádřit pomocí exponenciální funkce.
(ii) Ukažte, že funkce $\arcsin z$ lze vyjádřit pomocí logaritmu a odmocniny (což je de facto logaritmus a exponenciála).
Existenci logaritmu a odmocniny (na vhodné podmnožině $\mathbb{C}$) předpokládejte.

③ Zvolte si libovolnou (nelineární) holomorfní funkci $z \mapsto f(z)$. Přepište ji jako (vektorovou) funkci $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$, kde $z = x + iy$ a $f = f_1 + if_2$.
Ověřte, že f_1 a f_2 jsou jsou harmonické funkce, tj. $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$, kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

④ [Exercise 21, Lecture 9.] Ukažte, že spojitá funkce na kompaktní množině M je dokonce *stejnoměrně spojitá*, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x, y \in M\big)\big[d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \varepsilon\big]$$

⑤ Dokažte následující tvrzení:
(i) Nechť $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ je po částech C^1 křivka (ne nutně uzavřená) s počátečním bodem $\varphi(a) = z_0$ a koncovým bodem $\varphi(b) = z_1$. Nechť $F'(z) = f(z)$ platí na nějaké otevřené množině, obsahující $\varphi[a, b]$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0)$$

(ii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, tj. otevřená (křivkově) souvislá množina. Nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$. Potom $F(z)$ je v Ω konstantní.

Viz též nápovědu na straně 2.

ad 1) ukažte z definice, že derivace (podle komplexní proměnné) neexistuje v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.

ad 2) (i) vyjděte ze vztahů $\exp(\pm iz) = \cos z \pm i \sin z$

(ii) rovnici $z = \sin w$ vyřešte nejprve vůči e^{iw}

ad 4) Nepřímo: nechť formule neplatí, tj. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in M) \dots$. Fixuji takové ε a volím $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, k čemuž dostanu posloupnost bodů x_n, $y_n \in M$. BÚNO $x_n \to x_0 \in M$ (kompaktnost), a přivedu ke sporu se spojitostí.

ad 5) (i) po rozepsání definice integrálu se užije první věta o substituci

(ii) libovolné z_0, $z_1 \in \Omega$ spojte křivkou φ a užijte předchozí bod