Vybrané kapitoly z teorie dynamických systémů

NMMA574, Dalibor Pražák, LS 2014/15

1. Teorie dimenze.

V celé kapitole (X, ρ) je separabilní metrický prostor.

Definice. Malá induktivní (též Menger-Urysohnova dimenze) m.p. X se definuje takto:

- $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$
- $\dim X \leq n$, pokud pro každé $x \in X$ a každé V okolí x existuje otevřená U t.ž. $x \in U \subset V$ a $\dim \partial U \leq n-1$
- $\dim X = n$ právě když $\dim X \leq n$ a zároveň neplatí $\dim X \leq n-1$
- $\dim X = \infty$ pokud $\dim X \leq n$ neplatí pro žádné n

Poznámky. Jedná o topologický pojem: jsou-li X, Y homeomorfní, pak $\dim X = \dim Y$. Zřejmě (indukcí) $\tilde{X} \subset X \implies \dim \tilde{X} \leq \dim X$.
Je-li X spočetný nebo konečný, pak $\dim X = 0$. Indukcí si lze rozmyslet, že $\dim \mathbb{R}^n \leq n$. Opačná nerovnost (vyjma $n = 1$) je však netriviální (fakticky ekvivalentní Brouwerově větě). Pro $X_1 = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ racionální}\}$ a $X_2 = \{x \in \mathbb{R}; x \text{ je iracionální}\}$ platí $\dim X_1 = \dim X_2 = 0$, avšak $\dim(X_1 \cup X_2) = 1$; tj. dim není stabilní ani vůči konečným sjednocením.

Definice. Řekneme, že L roztíná X mezi A, B, jestliže existují otevřené U, W t.ž. $A \subset U$, $B \subset W$, $U \cap W = \emptyset$ a $L = X \setminus (U \cup W)$.
Řekneme, že A, B jsou oddělené, jestliže $\emptyset$ roztíná X mezi A, B.

Poznámka. Roztínající množina L je nutně uzavřená. V případě $L = \emptyset$ jsou oddělující množiny U, W obojetné (tj. otevřené a uzavřené zároveň).

Lemma 1.1 $\dim X \leq n$ právě když pro každé $x \in X$ a uzavřenou B takovou, že $x \notin B$, existuje L roztínající X mezi $\{x\}$ a B takové, že $\dim L \leq n-1$.

Lemma 1.2 Pokud $\dim X = 0$ a C, $K \subset X$ jsou disjunktní, uzavřené, pak C, K jsou oddělené.

Věta 1.1 [O sumě – verze 0.] Pokud $X = \bigcup_{i=1}^{\infty}$, kde $\dim C_i = 0$ a C_i jsou uzavřené (v X), pak $\dim X = 0$.

Věta 1.2 [O sumě – obecná verze.] Pokud $X = \bigcup_{i=1}^{\infty}$, kde $\dim C_i \leq n$ a C_i jsou uzavřené (v X), pak $\dim X \leq n$.

Věta 1.3 [O rozkladu.] Je-li $\dim X \leq n$, pak existují X_0, X_1 takové, že $X = X_0 \cup X_1$, $\dim X_1 \leq n-1$ a $\dim X_0 \leq 0$.

Důsledky. Je-li $X = X_1 \cup X_2$, $\dim X_1$, $X_2 \leq n$ a X_1 je uzavřená v X, pak $\dim X \leq n$.
Je-li $X \neq \emptyset$, pak $\dim(X \cup \{a\}) = \dim X$.

Věta 1.4 [O rozkladu – verze 2.] $\dim X \leq n$ právě když lze psát $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{n+1}$, kde $\dim X_j \leq 0$.

Definice. Pokrytím X budeme rozumět vždy konečný systém otevřených množin $\{U_\alpha\}$ t.ž. $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Pokrytí $\{V_\beta\}$ se nazve zjemněním pokrytí $\{U_\alpha\}$, jestliže $\forall \beta \exists \alpha$ t.ž. $V_\beta \subset$

U_α. Řádem pokrytí $\{U_\alpha\}$ rozumíme největší n takové, že existují $U_1, \dots U_{n+1} \subset \{U_\alpha\}$ t.ž. $\bigcap_{i=1}^{n+1} U_i \neq \emptyset$.

Věta 1.5 Pokud $\dim X \leq n$, pak každé pokrytí X má zjemnění řádu $\leq n$.

Lemma 1.3 Pokud $\dim X \leq 0$, pak každé pokrytí X má zjemnění, které je disjunktní.

Definice. Pokrývací dimenze $\dim_C X$ se definuje takto:

- $\dim_C X \leq n$, jestliže každé pokrytí má zjemnění řádu $\leq n$
- $\dim_C X = n$, jestliže $\dim_C X \leq n$ a zároveň neplatí $\dim_C X \leq n-1$

Poznámky. Z Věty 1.5 plyne, že v kompaktních m.p. je $\dim_C X \leq \dim X$. Ve skutečnosti platí $\dim_C X = \dim X$ pro libovolný m.p. X.
Není těžké si rozmyslet, že $\dim_C I_n \leq n$, kde $I_n = [0,1]^n$. Opačná nerovnost je hlubší (Brouwerova věta) a plyne z ní konečně také, že $\dim \mathbb{R}^n \geq n$.

Věta 1.6 [O vnoření.] Nechť X je kompaktní m.p., $\dim X \leq n$. Pak existuje prosté, spojité $f : X \to I_{2n+1}$.

Poznámky. Speciálně to znamená, že kompaktní m.p. dimenze n je homeomorfní nějaké podmnožině $\mathbb{R}^{2n+1}$. Lze ukázat, že exponent $2n+1$ je nejmenší možný.

Značení a pojmy. $\mathcal{F} = C(X; I_{2n+1})$, $\mathcal{G}_\epsilon \subset \mathcal{F}$ jsou ϵ-funkce, tj. splňující $\operatorname{diam} g^{-1}(\{y\}) < \epsilon$ pro každé $y \in I_{2n+1}$. Zřejmě $\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{G}_\epsilon$ jsou právě všechny prosté funkce.
Řekneme, že body $P = \{p_1, \dots, p_r\} \subset \mathbb{R}^N$ jsou v obecné poloze, pokud pro každou $N+1$-tici $y_1, \dots, y_{N+1} \subset P$ a čísla a_j platí:

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_j y_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N+1} a_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_j = 0, \ \forall j$$

Názorně: $N = 2$ …žádné tři body neleží v jedné přímce, $N = 3$ …žádné tři neleží v rovině, atd. Jsou-li body $P \subset \mathbb{R}^N$ a $\delta > 0$ dány libovolně, pak existují body $\tilde{P}$ v obecné poloze, navíc $|p_j - \tilde{p}_j| < \delta$ pro každé $j = 1, \dots, r$.

Lemma 1.4 Nechť X je kompaktní m.p., $\dim X \leq n$, a $\epsilon > 0$. Pak $\mathcal{G}_\epsilon$ je hustá v $\mathcal{F}$.

Poznámka. Pojmy dimenze, které jsme dosud studovali (induktivní, pokrývací) jsou ryze topologické. V metrických prostorech splývají. V dalším se zaměříme na pojmy dimenze, které jsou metrické, či dokonce (jako Hausdorffova dimenze) souvisí s pojmem míry.

Definice. Nechť X je m.p., $A \subset X$, $s \geq 0$ a $\delta > 0$. Definujeme

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s \, ; \ \operatorname{diam} U_i \leq \delta, \ A \subset \sum_i U_i\}$$
$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Veličina $\mathcal{H}^s$ se nazývá s-dimenzionální (vnější) Hausdorffova míra.

Poznámky. Není těžké dokázat, že $\mathcal{H}^s$ je σ-subaditivní. Je-li X normovaný prostor, pak je $\mathcal{H}^s$ s-homogenní, tj. $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s H^s(A)$ pro $\lambda > 0$. Je to metrická míra: pokud A, B mají

kladnou vzdálenost, je $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ a odtud se snadno ukáže, že všechny Borelovské množiny jsou měřitelné ve smyslu Carathéodoryho.
Souvislost s jinými měrami: pro $s = 0$ máme počítací míru. Je-li $s = n \in \mathbb{N}$ a $X = \mathbb{R}^n$, pak $\mathcal{H}^s = \alpha_n 2^{-n} \lambda_n^*$, kde λ_n^* je vnější Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ a α_n objem jednotkové koule. Nerovnost $\leq$ je snadná, k opačné potřebujeme izodiametrickou nerovnost (tj. ze všech množin daného průměru má koule maximální objem).

Pozorování. V souvislosti s pojmem dimenze je klíčové následující pozorování: je-li $\tilde{s} > s > 0$, pak $\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^{\tilde{s}}(A) = 0$. Ekvivalentně $\mathcal{H}^{\tilde{s}}(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Definice. Hausdorffova dimenze množiny A se definuje jako

$$\dim_H A = \inf\{d \geq 0;\ \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{d > 0;\ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

Věta 1.7 $\dim A \leq \dim_H A$.

Poznámka. Klíčovým krokem předchozím věty je „fubiniovský odhad“: je-li $\mathcal{H}^{n+1}(X) = 0$, pak pro s.v. $r > 0$ je $\mathcal{H}^n(X \cap S(x_0, r)) = 0$.

Poznámka. Je-li $\mathcal{H}^s(A) \in (0, \infty)$, pak A se nazve s-množina. Zřejmě takové A má Hausdorffovu dimenzi s. Speciálně pro $A \subset \mathbb{R}^n$ kladné míry je $\dim_H A = n$. Pro N spočetnou je $\dim_H N = 0$, viz též Lemma 1.5(i) níže.
Množina A se nazve fraktál, pokud $\dim A < \dim_H A$. Opět je jasné, že „být fraktál“ je metrický a nikoliv topologický pojem. Lze dokázat, že

$$\dim X = \inf\{\dim_H \tilde{X};\ \tilde{X} \text{ je m.p. homeomorfní } X\}$$

Dokonce (pro separabilní X) se tohoto infima vždy nabývá (tzv. antifraktální neboli plochá metrika).

Lemma 1.5 (i) $\dim_H \bigcup_k A_k = \sup_k \dim_H A_k$ (ii) je-li $f : X \to Y$ θ-hölderovské, $A \subset X$, pak $\dim_H f(A) \leq \theta^{-1} \dim_H A$.

Definice. Nechť X je m.p., $A \subset X$ je relativně kompaktní. Definujeme

$$N_X(A, \varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{N};\ A \subset \bigcup_{j=1}^N U_j,\ \operatorname{diam} U_j \leq \varepsilon\}$$

$$\dim_B A = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln N_X(A, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$$

Veličinu $\dim_B A$ budeme nazývat počítací dimenze (”box-counting”), $N_X(A, \varepsilon)$ se nazývá pokrývací číslo.

Poznámky. Je to nejčastěji užívaný pojem dimenze v teorii PDR, kde se zpravidla (nesprávně) nazývá „fraktální dimenze“. Vychází z heuristické představy, že $N_X(A, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-\dim A}$ pro $\varepsilon \sim 0$.
Různé varianty definice pokrývacího čísla $N_X(A, \varepsilon)$, například „nejmenší počet uzavřených koulí o poloměru ε a středu v A, pokrývajících A“, vedou ke stejné hodnotě $\dim_B A$.

Věta 1.8 $\dim_H A \leq \dim_B A$.

Poznámka. Lze najít příklad, kdy $\dim_H A = 0$ a $\dim_B A = \infty$.

Lemma 1.6 (i) $\dim_B(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \max_j \dim_B A_j$ (ii) $\dim_B \overline{A} = \dim_B A$ (iii) je-li $f : X \to Y$ θ-hölderovské, $A \subset X$, pak $\dim_B f(A) \leq \theta^{-1} \dim_B A$

Poznámka. Ohledně kartézského součinu: $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ platí pro induktivní a též pro počítací dimenzi; neplatí pro Hausdorffovu dimenzi.

Lemma 1.7 Nechť je dána posloupnost $\varepsilon_k \searrow 0$ a existuje $\alpha \in (0,1)$ tak, že $\varepsilon_{k+1} \geq \alpha \varepsilon_k$. Potom

$$\dim_B A = \limsup_{k \to \infty} \frac{\ln N_X(A, \varepsilon_k)}{-\ln \varepsilon_k}$$

Lemma 1.8 Je-li $X = \mathbb{R}^n$ a $A = B(0,R)$, $r \leq R$, pak $N_X(A,r) \leq c(R/r)^n$, kde $c = 5^n$.

Důsledek. Každá $G \subset \mathbb{R}^n$ omezená má $\dim_B G \leq n$; pokud G má kladnou míru, pak naopak $\dim_B G \geq n$.

Poznámka. Pro dosud zavedené dimenze platí

$$\dim X \leq \dim_H X \leq \dim_B X$$

příkladem na první nerovnost je třeba Cantorovo diskontinuum $\mathcal{C}$, pro něž $\dim \mathcal{C} = 0$, avšak $\dim_H \mathcal{C} = \dim_B \mathcal{C} = \ln 2 / \ln 3$. Příkladem na druhou nerovnost je typicky spočetná množina N, pro niž $\dim N = \dim_H N = 0$, avšak $\dim_B N = \dim_B \overline{N}$ může být libovolně velká.
Obecně tedy platí, že odhad na $\dim_B X$ je silnější omezení než odhad na $\dim X$, a tedy očekáváme vylepšení vnořovací Věty 1.6 ve smyslu lepší regularity f a f_{-1}. Následující příklad ukazuje, že f_{-1} obecně nebude lepší než hölderovská.

Lemma 1.9 Nechť $A = \{a_i \boldsymbol{e}_i;\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \ell^2$, kde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \to 0$ a $\boldsymbol{e}_i$ jsou kanonické bázové vektory $\boldsymbol{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Potom

$$\dim_B A = \limsup_{i \to \infty} \frac{\ln i}{-\ln |a_i|} = \inf\{d > 0; \sum_i |a_i|^d < \infty\}$$

Lemma 1.10 Nechť H je Hilbertův prostor, $\{e_i\} \subset H$ ortonormální posloupnost, $P : H \to H$ ortogonální projekce. Potom $\operatorname{rank} P \geq \sum_i \|Pe_i\|^2$.

Důsledek. Nechť $A \subset \ell^2$ je jako v Lemmatu 1.9, nechť $P : \ell^2 \to \ell^2$ je OG projekce s konečnou dimenzí ranku, nechť P je prosté na A a $\big(P|_A\big)_{-1}$ je θ-hölderovské. Potom $\theta \leq (1 + (\dim_B A)/2)^{-1}$.

Věta 1.9 [Hölder-Mañého věta pro $\mathbb{R}^N$.] Nechť $X \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, než $d := \dim_B X < k/2$, kde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1 - 2d/k)$. Potom existuje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ takové, že L je prosté na X a $\big(L|_X\big)_{-1}$ je α-hölderovské.

Poznámka. Ve skutečnosti dokážeme silnější výrok: je-li $L_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ libovolné, pak pro μ-s.v. $L \in E$ platí, že $L_0 + L$ je hölderovsky invertovatelné na X. Speciálně množina takový zobrazení je hustá v $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$.

Značení. $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ jsou všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^k$. Každé $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$ lze psát jako $L = (L_1, \dots, L_k)$, kde $L_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, které lze kanonicky reprezentovat jako $L_j = \ell_j^*$, kde definujeme $\ell_j^* : x \mapsto \ell_j \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\ell_j \in \mathbb{R}^N$.

Dále budeme pracovat s množinou $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k)$, definovanou jako

$$E = \{(\ell_1^*, \dots, \ell_k^*);\ \ell_j \in B_N\}$$

kde $B_N = B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^N$. Zřejmě pro $L \in E$ je $\|L\| \le \sqrt{k}$. Na množině E definujeme míru μ jako součin měr $\lambda \times \cdots \times \lambda$, kde $\lambda = \lambda_N/\alpha_N$, λ_N je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^N$ a $\alpha_N = \lambda_N(B_N)$ objem jednotkové koule. Zřejmě λ i μ jsou pravděpodobnostní míry, které popisují náhodnou volbu prvku z B_N respektive z E.

Lemma 1.11 Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$. Potom

$$\mu\{L \in E;\ |\alpha + Lx| \le \varepsilon\} \le cN^{k/2} \left(\frac{\varepsilon}{|x|}\right)^k$$

kde konstanta c nezávisí na N, k, ε, x a α.

Poznámka. V předchozím důkaze se potřebuje asymptotický odhad $\alpha_{N-1}/\alpha_N \le cN^{1/2}$. Ten lze získat oklikou přes vzoreček $\alpha_N = \pi^{N/2}/\Gamma(N/2+1)$ a Stirlingovy formule

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + \mathcal{O}(1/z)\right)$$

Nebo lze z Fubiniho věty spočíst přímo hodnotu $r_N := \alpha_N/\alpha_{N-1}$ a vyšetřit příslušnou asymptotiku.

Lemma 1.12 [Borel-Cantelli.] Nechť Q_j jsou měřitelné množiny, nechť $\sum_j \mu(Q_j) < \infty$. Potom μ-s.v. prvky náleží do nejvýše konečně mnoha Q_j.

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor, $X \subset H$ kompaktní. Definujeme

$$d(X,\varepsilon) = \min\{d = \dim V;\ V \subset\subset H \text{ je lineární podprostor t.ž. } \operatorname{dist}(X,V) \le \varepsilon\ \}$$
$$\tau(X) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln d_X(A,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$$

Poznámka. Číslo $\tau(X)$ se nazývá *exponent tloušťky* ("thickness exponent") množiny X. Protože $d(X,\varepsilon) \le N(X,\varepsilon)$, je $\tau(X)$ nejvýše rovno počítací dimenzi.
Může však být podstatně menší; typicky pokud X se nachází v konečně-dimenzionálním podprostoru H. Později uvidíme, že pokud $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je omezená oblast s regulární hranicí, $H = L^2(\Omega)$, pak omezenost X v nějakém $W^{k,2}$ implikuje $\tau(X) \le m/k$.

Věta 1.10. [Hölder-Mañé - obecná.] Nechť H je Hilbertův prostor, $X \subset H$ kompaktní, $d = \dim_B X < k/2$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $\tau = \tau(X)$, $0 < \alpha < \frac{k-2d}{k(1+\tau/2)}$. Potom existuje $L \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^k)$ takové, že L je prosté na X a $\left(L|_X\right)_{-1}$ je α-hölderovské.

Značení. Nechť jsou dány konečně-dimenzionální lineární podprostory $V_n \subset\subset H$, $n = 1, 2, \dots$. Definujeme $E \subset H^*$ jako

$$E = \{L = (\ell_1, \dots, \ell_k);\ \ell_j = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \ell_{jn}^*,\ \ell_{jn} \in B_n\}$$

kde B_n je jednotková koule ve V_n a opět kanonicky $\ell_{jn} : x \mapsto (x, \ell_{jn})$. Na μ definujeme pravděpodobnostní míru, která je nekonečným součinem normovaných Lebesgueových měr na B_n a která vyjadřuje nezávislou a náhodnou volbu $\ell_{jn} \in B_n$.

Důkaz Věty 1.10 je analogický Větě 1.9, přičemž Lemma 1.11 nahradíme obecnějším.

Lemma 1.13. Nechť $x \in H$, $\varepsilon > 0$ je dáno. Potom

$$\mu\{L \in E;\ |Lx| < \varepsilon\} \le c\left(n^2 d_n^{1/2} \frac{\varepsilon}{\|P_n x\|}\right)^k$$

pro každé $n = 1, 2, \dots$, kde $d_n = \dim V_n$, P_n je kolmá projekce na V_n a opět c je univerzální konstanta.

2. Konečně-dimenzionální atraktor.

V této kapitole budeme studovat ,,modelový případ" rovnice reakce-difuze

$$\partial_t u - a\Delta u + f(u) = 0 \tag{RD}$$

pro neznámou funkci $u = u(t,x) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Rovnici uvažujeme s okrajovou a počáteční podmínkou

$$\begin{aligned} u &= 0 \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u &= u_0 \qquad x \in \Omega,\ t = 0 \end{aligned}$$

Předpoklady **(P)** platné v celé kapitole: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená množina s rozumnou (např. lipschitzovskou) hranicí, $a > 0$, funkce $f(\cdot)$ je globálně lipschitzovská s konstantou L. Navíc požadujeme podmínku disipativity: $f(u)u \ge 0$ pro dost velká $|u|$.

Značení. Na u hledíme jako na funkci jen časové proměnné s hodnotami v nějakém prostoru funkcí na Ω, typicky $L^2(\Omega)$ nebo $W_0^{1,2}(\Omega)$; symbol Ω nadále vynecháváme. Normy v těchto prostorech značíme $\|u\|_2$, $\|u\|_{1,2}$. Řešení bude ležet v prostoru Bochnerova typu $L^2(0,T;W_0^{1,2})$. Operátor $-\Delta$ budeme chápat slabě, tj. jako zobrazení

$$-\Delta u : \varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx$$

V tomto smyslu jde (při pevném $u \in W_0^{1,2}$) o prvek duálu $W^{-1,2} := (W_0^{1,2})^*$.
Budeme potřebovat následující fakta: Poincarého nerovnost $\|u\|_2 \le \lambda_1^{-1/2}\|\nabla u\|_2$, jež platí pro každé $u \in W_0^{1,2}$, kde $\lambda_1 > 0$ je první (nejmenší) vlastní číslo Dirichletova laplaciánu, tj. úlohy $-\Delta u = \lambda u$ v Ω s okr. podm. $u = 0$ na $\partial\Omega$. Dále budeme potřebovat kompaktnost vnoření $W_0^{1,2}$ do L^2 (tzv. Rellich-Kondrachovova věta). Konečně budeme potřebovat kompaktnost vnoření Y_T do $L^2(0,T,L^2)$, kde prostor Y_T je definován jako

$$Y_T := \left\{u \in L^2(0,T;W_0^{1,2}),\ \partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2})\right\}$$

Tento výsledek se v literatuře vyskytuje pod rozličnými jmény (Aubin-Lions, Aubin-Simon, Dubinskii, ...).

Definice. Funkce $u \in L^2(0,T;W_0^{1,2})$ se nazve slabé řešení rovnice (RD), jestliže

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u\varphi + a\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega f(u)\varphi = 0 \tag{1}$$

ve smyslu distribucí v $(0,T)$, pro každé pevné $\varphi \in W_0^{1,2}$.

Poznámka. Lze ukázat, že definice má smysl (integrandy jakožto funkce proměnné t jsou alespoň v $L^1(0,T)$). Dále z ní vyplývá, že $\partial_t u \in L^2(0,T;W^{-1,2})$ a odtud dále, že řešení náleží (ve smyslu reprezentanta) do třídy $C([0,T];L^2)$. Speciálně má smysl hovořit o nabývání počáteční podmínky.

Věta 2.1.[1] [Existence a jednoznačnost.] Pro každé $u_0 \in L^2$ a $T > 0$ existuje právě jedno slabé řešení rovnice (RD), splňující $u(0) = u_0$. Odhad normy řešení v prostorech $L^2(0,T;W_0^{1,2})$ a $C([0,T];L^2)$ závisí pouze na $\|u_0\|_2$, $T > 0$ a datech rovnice (tj. a, $f(0)$, L a Ω).

Věta 2.2. [2] [Regularita.] Slabé řešení dále splňuje

$$u \in L^\infty(t_0,T;W_0^{1,2}) \tag{2}$$

$$\partial_t u \in L^2(t_0,T;L^2) \tag{3}$$

pro libovolné $t_0 \in (0,T)$. Odhad těchto norem závisí pouze na t_0, T, $\|u_0\|_2$ a datech rovnice.

Definice. Řekneme, že dvojice $(S(t),X)$, kde X je normovaný prostor a $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, jsou (obecně nelineární) operátory, tvoří *dynamický systém* (d.s.), jestliže: (i) $S(0) = I$, (ii) $S(t)S(s) = S(t+s)$ a (iii) zobrazení $(t,u_0) \mapsto S(t)u_0$ je spojité.

Poznámka. Z Věty 2.1 plyne, že „operátory řešení“ (RD), definované jako $S(t)u_0 \mapsto u(t)$, kde $u = u(t)$ je řešení příslušné k počáteční podmínce u_0, tvoří d.s. v prostoru $X = L^2$.
Obecně platí (za rozumných předpokladů), že „dynamické systémy“ a „řešicí operátory“ jsou jen jiné zápisy téhož; d.s. lze chápat jako šikovné značení pro (nebo abstraktní pohled na) popis vývoje řešení v čase.

Definice. Dynamický systém se nazve *disipativní*, jestliže $\exists W \subset X$ omezená t.ž. pro $\forall B \subset X$ omezené $\exists t_0 > 0$ t.ž. $S(t)B \subset W$ pro $\forall t \geq t_0$.
Dynamický systém se nazve *asymptoticky kompaktní*, jestliže pro $\forall\{u_n\} \in X$ omezenou posloupnost a $\forall t_n \to \infty$ platí, že $\{S(t_n)u_n\}$ má konvergentní podposloupnost.

Definice. Množina $\mathcal{A} \subset X$ se nazve *globální atraktor* pro d.s. $(S(t),X)$, jestliže: (i) $\mathcal{A}$ je kompaktní, (ii) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pro $\forall t \geq 0$ a (iii) pro $\forall B \subset X$ omezenou platí, že $\operatorname{dist}_X(S(t)B,\mathcal{A}) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Poznámka. Lze ukázat, že atraktor (existuje-li) je největší omezená množina s vlastností (ii) a zároveň nejmenší uzavřená množina s vlastností (iii). Speciálně je určen jednoznačně.
Tedy globální atraktor je nejmenší kompaktní množina, která obsahuje veškerou dynamiku rovnice pro „nekonečně velké“ časy. Konečně-dimenzionální charakter dynamiky se zde musí projevit a my směřujeme nyní k hlavnímu výsledku kapitoly: totiž že d.s. příslušný k (RD) má globální atraktor, a ten má konečnou počítací dimenzi.

Věta 2.3. Nechť $(S(t),X)$ je dynamický systém. Potom je ekvivalentní:
(1) $(S(t),X)$ je disipativní a asymptoticky kompaktní.
(2) existuje $\mathcal{A} \subset X$ globální atraktor pro $(S(t),X)$.

Věta 2.4. D.s. určený rovnicí (RD) je disipativní.

Věta 2.5. D.s. určený rovnicí (RD) má globální atraktor $\mathcal{A}$.

[1] Bez důkazu.
[2] Formální důkaz.

Značení. [„Metoda trajektorií.“]. Pro $\ell > 0$ pevné definujeme:

$$\mathcal{X}_\ell = \{\chi : [0,\ell] \to L^2;\ \chi \text{ je slabé řešení (RD) na } [0,\ell]\}$$
$$\mathcal{A}_\ell = \{\chi \in \mathcal{X}_\ell;\ \chi(0) \in \mathcal{A}\}$$

Množina trajektorií $\mathcal{X}_\ell$ se implicitně uvažuje s topologií $X_\ell = L^2(0,\ell;L^2)$. Dále definujeme operátory $b : L^2 \to \mathcal{X}_\ell$ předpisem $b : u_0 \mapsto \chi$ takové, že $\chi(0) = u_0$ a $e : \mathcal{X}_\ell \to L^2$ předpisem $e : \chi \mapsto \chi(0)$. Konečně definujeme $L(t) : \mathcal{X}_\ell \to \mathcal{X}_\ell$ jako $L(t) : \chi \mapsto \psi$, kde $\psi(s) = S(t)\chi(s)$, $s \in [0,\ell]$.
Na $(L(t), \mathcal{X}_\ell)$ lze hledět jako na alternativní dynamický systém, popisující chování (RD). Mnohé vlastnosti se pro něj dokazují snáze než pro $(S(t), L^2)$. Pomocí operátorů e a b lze přecházet mezi jedním a druhým popisem. Například $\mathcal{A}_\ell = b(\mathcal{A})$ je globální atraktor pro $(L(t), \mathcal{X}_\ell)$.

Lemma 2.1. Platí:
(i) $\mathcal{A}_\ell = b(\mathcal{A})$, $e(\mathcal{A}_\ell) = \mathcal{A}$
(ii) b, e, $L(t)$ jsou Lipschitzovské na $\mathcal{A}$ resp. $\mathcal{A}_\ell$
(iii) $L(t)\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}_\ell$ pro $\forall t \geq 0$

Lemma 2.2. Operátory $L(\ell)$ jsou na $\mathcal{A}_\ell$ lipschitzovské z X_ℓ do Y_ℓ.

Lemma 2.3. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, Y je kompaktně vnořen do X. Nechť $A \subset X$ je omezená množina a nechť existuje zobrazení $L : X \to X$ takové, že $L(A) = A$ a L je na A lipschitzovské z X do Y. Potom $\dim_B A < \infty$ (vůči X i Y normě).

Věta 2.6. Globální atraktor $\mathcal{A}$ pro d.s. $(S(t), L^2)$, určený rovnicí (RD), má konečnou počítací dimenzi.

Poznámky. Z Věty 1.10 plyne, že existuje prostá projekce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^k$. Tedy rovnici lze na atraktoru nahradit systémem $x' = h(x)$ rovnic v $\mathbb{R}^k$. Slabostí tohoto výsledku, kterou patrně není možné jednoduše odstranit, je, že P^{-1} a tedy $h(\cdot)$ je obecně pouze hölderovská (viz Důsledek za Lemmatem 1.10), a tedy redukovaný systém není jednoznačně řešitelný. Tuto potíž se budeme snažit odstranit v následujících kapitolách.

3. Konečně-dimenzionální limitní dynamika.

Poznámka. Převážně dle článků [Romanov 2000, 2001.]
V této kapitole se budeme zabývat abstraktní evoluční rovnicí

$$\frac{d}{dt}u + Au + F(u) = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{ARD}$$

pro neznámou funkci $u(t) : [0,T] \to H^\alpha$. Klíčovým předpokladem je (bodový) spektrální rozklad $A(\sum_j c_j u_j) = \sum_j \lambda_j c_j u_j$, kde u_j je (abstraktní) báze a vlastní čísla λ_j splňují

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \to \infty$$

Prostory H^α jsou definovány normou $\left(\sum_j \lambda_j^\alpha c_j^2\right)^{1/2}$. Všechny tyto pojmy a jejich základní vlastnosti (mj. projekce P_n, Q_n, operátory e^{-tA} a také pojem řešení pro rovnici (ARD)) jsou popsány ve zvláštním textu.

Zmiňme zde „shlazovací vlastnost“ operátoru e^{-tA}, tj. odhad

$$\|e^{-tA}u\|_{H\alpha} \le M_n t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\omega_n t}\|u\|_{H^0} \tag{4}$$

platící pro $t > 0$, $u \in Q_n H^0$ a libovolné $\omega_n < \lambda_{n+1}$, s vhodnou konstantou $M_n = M(n, \alpha, \omega_n)$. Požadujeme ještě existenci čísel $\omega_n < \lambda_{n+1}$, $\omega_n \to \infty$ takových, že

$$\inf_{n\ge 1} \omega_n^{\frac{\alpha}{2}-1} M(n, \alpha, \omega_n) = 0 \tag{APS}$$

– technický předpoklad, který je přirozeně splněn v aplikacích. Nelinearita $F(\cdot)$ splňuje

$$F(\cdot) \in C^2(H^\alpha, H^0)$$
$$\mathcal{B} \subset H^\alpha \text{omezená} \implies F(\mathcal{B}) \subset H^0 \text{omezená}$$

+ nějaká podmínka disipativity (zaručující mj. *globální* existenci řešení). Prostor H^α, v němž řešení „žije“, je pevný v celé kapitole pro nějaké $\alpha \in [0, 2)$.

Věta 3.1.[3] Pro každé $u_0 \in H^\alpha$, $T > 0$, existuje právě jedno $u(t) : [0, T] \to H^\alpha$ řešení rovnice (ARD).

Poznámka. Předchozí věta opravňuje hovořit o „řešicích operátorech“ alias dynamickém systému určeném rovnicí (ARD), $S(t) : H^\alpha \to H^\alpha$, ovšem obecně jen pro $t \ge 0$.
Připomeňme, že množina $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ se nazve invariantní, pokud $S(t)\mathcal{K} = \mathcal{K}$ pro každé $t \ge 0$. Za uvedených předpokladů lze dokázat (metodami předešlé kapitoly), že d.s. $S(t)$ má globální atraktor (který je mj. největší kompaktní invariantní množinou).

Definice. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní, invariantní množina. Řekneme, že (ARD) má na $\mathcal{K}$ *konečně-dimenzionální dynamiku*, jestliže existuje bi-lipschitzovská funkce $g : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^N$ a lipschitzovská funkce $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ taková, že $g(S(t)u_0) = \varphi(t)g(u_0)$ pro každé $t \ge 0$, $u_0 \in \mathcal{K}$, kde $\varphi(t) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ jsou řešicí operátory příslušné systému

$$x' = h(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{ODR}$$

Řekneme, že (ARD) má *konečně-dimenzionální limitní dynamiku*, jestliže má konečně dimenzionální dynamiku na globálním atraktoru $\mathcal{A}$.

Poznámka. Řešicí operátory $\varphi(t)$ pro (ODR) jsou definovány pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a lipschitzovská konstanta $\varphi(t)$ lze odhadnout $e^{C|t|}$, kde C je lipschitzovská konstanta pravé strany $h(\cdot)$.

Lemma 3.1. Nechť $\mathcal{N} \subset H^\alpha$ je invariantní, a $G(u) = -Au + F(u)$ je na $\mathcal{N}$ lipschitzovská $H^\theta \to H^\theta$, $\theta < 2$. Potom $S(t)$ je na $\mathcal{N}$ prosté, a po rozšíření i na $t \le 0$ zde splňuje $\operatorname{Lip} S(t) \le Ke^{\omega|t|}$, s vhodnými K, $\omega > 0$.

Lemma 3.2. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní. Potom zobrazení $G(S(t)\cdot)$ je na $\mathcal{K}$ lipschitzovské $H^\alpha \to H^\alpha$, při $t > 0$ pevném.

Lemma 3.3. [Lemma 2.2, Romanov 2000.] Označme $\Pi(\theta, k)$ množinu k-dimenzionálních projekcí $H^\theta \to H^\theta$. Potom pro všechna $k \ge 1$ a $\theta > \nu$ je množina $\Pi(\theta, k) \cap \Pi(\nu, k)$ hustá v $\Pi(\theta, k)$ v příslušné operátorové normě.

Věta 3.2. Nechť $\mathcal{K} \subset H^\alpha$ je kompaktní, invariantní. Potom je ekvivalentní:

[3] Bez důkazu.

(FD) (ARD) má na $\mathcal{K}$ konečně-dimenzionální dynamiku

(VF) $G(u) = -Au + F(u)$ je na $\mathcal{K}$ lipschitzovská $H^\alpha \to H^\alpha$

(Fl) $S(t)$ je na $\mathcal{K}$ prosté, a po rozšíření i na $t \leq 0$ je $\operatorname{Lip} S(t) \leq Ke^{\omega|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, pro vhodné K, $\omega > 0$

(GrF) existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\|u - v\|_{H^\alpha} \leq c\|P_n(u - v)\|_{H^\alpha}$, pro $\forall u, v \in \mathcal{K}$

(Gr) existuje konečně-dimenzionální projekce P tak, že že $\|u - v\|_{H^\alpha} \leq c\|P(u - v)\|_{H^\alpha}$, pro $\forall u, v \in \mathcal{K}$

(EM) H^α a $H^{\alpha-2}$ určují na $\mathcal{K}$ ekvivalentní metriky

Poznámky. V článku [Romanov 2001] se dokazují dvě další ekvivalentní podmínky:

(KC) množina $\mathcal{K}^0 = \{(u - v)/\|u - v\|_{H^\alpha};\ u, v \in \mathcal{K}\}$ je relativně kompaktní v H^α

(GrL) pro každé $w \in \mathcal{K}$ existuje $\mathcal{W}$ okolí v H^α a konečně-dimenzionální projektor $P : H^\alpha \to H^\alpha$ takový, že $\|u - v\|_{H^\alpha} \leq c\|P(u - v)\|_{H^\alpha}$, pro $\forall u, v \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$

Posledně jmenovaná podmínka je pak ověřena v případě rovnice reakce-difuze v jedné prostorové proměnné

$$\partial_t u - \partial_{xx} u + f(x, u, \nabla u) = 0,$$

tj. $H^0 = L^2(0, 1)$, pro v zásadě obecné okrajové podmínky a hladkou nelinearitu $f(x, u, p)$.

4. Inerciální varieta.

Poznámka. Dle článku [Romanov 1994.]

V této kapitole studujeme stále rovnici (ARD); předpoklady na operátor A jsou jako výše, omezíme se na případ $\alpha = 0$, tj. řešení budou $u(t) : [0, \infty) \to H^0$. Předpoklady na nelinearitu $F(\cdot)$ zjednodušíme na podmínku *globální* lipschitzovskosti

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^0} \leq L\|u - v\|_{H^0} \tag{5}$$

pro nějaké $L > 0$. Budeme také předpokládat $F(0) = 0$, tj. $u = 0$ je řešení. Hlavním cílem kapitoly je dokázat existenci *inerciální variety*, což je konečně-dimenzionální lipschitzovská varieta v H^0, která je (úplně) invariantní, popisuje exponenciálně dobře veškerou dynamiku (ARD) pro $t \to \infty$ a dokonce ji lze charakterizovat jako grafy všech řešení jistého exponenciálního růstu pro $t \to -\infty$.
Připomeňme, že P_k, Q_k jsou projekce odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ respektive $\lambda_{k+1}, \ldots$, tj. P_k je k-dimenzionální. Normu v H^0 budeme značit pro jednoduchost $\|\cdot\|$.

Definice. Množinu $\mathcal{M} \subset H^\alpha$ nazveme *inerciální varietou* třídy $(k, \xi, \gamma, \gamma')$, jestliže $\mathcal{M} = \operatorname{graf} \sigma$, kde $\sigma : P_k \to Q_k$ je ξ-lipschitzovská, a platí

- pro $\forall u_0 \in \mathcal{M}$ existuje $u(t) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ řešení (ARD) t.ž. $u(0) = u_0$
- pro každé $u_0 \in H^\alpha$ existuje $\tilde{u}_0 \in \mathcal{M}$ takové, že

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^\alpha} \leq C_0\|Q_k u_0 - \sigma(P_k u_0)\|_{H^\alpha} \tag{6}$$

  a příslušná řešení $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ splňují

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^\alpha} \leq C_1\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^\alpha} e^{-\gamma t}, \qquad \forall t \geq 1 \tag{7}$$

- $\mathcal{M} = \mathcal{Z}(\gamma')$, kde $\mathcal{Z}(\gamma')$ je sjednocení grafů všech řešení (ARD), definovaných pro $t \in \mathbb{R}$ a splňujících odhad $\|u(t)\|_{H^\alpha} \leq C \exp(-\gamma' t)$ pro všechna $t \leq 0$.

Věta 4.1. Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $h \in (0,1)$ splňují

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > (1 + \omega(h))L, \quad \lambda_{k+1} > L \tag{SGC}$$

kde $\omega(h) = (h + h^{-1})/2$. Potom existuje inerciální varieta ve třídě $(k, \xi, \gamma, \gamma')$, kde $\xi = h$, $\gamma = \lambda_{k+1} - L$, $\gamma' = \lambda_k + L$.

Poznámky. Klíčová podmínka (SGC) ("spectral gap condition" neboli „podmínka díry ve spektru") požaduje, aby mezera mezi λ_k a λ_{k+1} byla dost velká (vzhledem k lipschitzovské konstantě nelinearity). Protože funkce $\omega(h)$ má minimum $\omega(1) = 1$, lze jí vyhovět, pokud $\lambda_{k+1} - \lambda_k > 2L$. Lze také ukázat, že konstanta dva je zde nejlepší možná.
Obecnější forma věty se týká situace, kdy $F(\cdot)$ je L-lischitzovská $H^\alpha \to H^0$ pro nějaké $\alpha \in [0,1)$. Potom předpoklad věty zní

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k > (\lambda_{k+1}^\alpha + \omega(h)\lambda_k^\alpha)L, \quad \lambda_1 > 0$$

a závěr platí s $\gamma = \lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}^\alpha L$, $\gamma' = \lambda_k + \lambda_k^\alpha L$. V tomto případě se pracuje s řešeními $u(t) : [0,\infty) \to H^\alpha$, varieta se konstruuje v prostoru H^α.

Definice. Definujme pro dané $k \in \mathbb{N}$ a $\xi > 0$ výraz $V_\xi(u) = \|y\|^2 - \xi^2\|x\|^2$, kde $u = P_k u + Q_k u = x + y$. Dále definujeme „kužely"

$$\mathcal{V}_\xi^+ = \{u \in H^0;\ V_\xi(u) \geq 0\} \tag{8}$$

$$\mathcal{V}_\xi^- = \{u \in H^0;\ V_\xi(u) \leq 0\} \tag{9}$$

Řekneme, že (ARD) splňuje podmínku (ξ, γ)-kuželu, jestliže pro libovolná dvě řešení $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ platí

$$V_\xi(u(t) - \tilde{u}(t)) \leq V_\xi(u_0 - \tilde{u}_0)e^{-2\gamma t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{$\xi\gamma$-K}$$

Poznámka. Z našeho hlediska je $\mathcal{V}_\xi^-$ „dobrá množina", protože y (a tedy celá norma) je kontrolována konečně-dimenzionální složkou x. Podmínka ($\xi\gamma$-K) zahrnuje dvě důležité vlastnosti: (i) $\mathcal{V}_\xi^-$ je dopředně invariantní, ekvivalentně $\mathcal{V}_\xi^+$ je zpětně invariantní a (ii) pokud na nějakém intervalu $u - \tilde{u}$ ve $\mathcal{V}_\xi^-$ neleží, tj. $V_\xi(u - \tilde{u}) > 0$, pak tato „porucha" klesá exponenciálně.
Ve zbývajícím textu již v podstatě probíhá důkaz Věty 4.1, tj. konstrukce inerciální variety $\mathcal{M}$. Předpokládáme tedy, že $k \in \mathbb{N}$, u nějž nastává klíčová podmínka (SGC), je pevné, a budeme psát jednoduše P a Q místo P_k a Q_k. Označíme $X = PH^0$ (rovná se $\mathbb{R}^k$) a $Y = QH^0$.

Lemma 4.1. [Romanov, Lemma 4.] Nechť platí (SGC). Potom platí ($\xi\gamma$-K) pro každé $\xi \in [h, h^{-1}]$ a $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, kde $\gamma_0 = \lambda_k + \omega(h)L$, $\gamma_1 = \lambda_{k+1} - L$.

Lemma 4.2. [Romanov, Lemma 5.] Nechť u_1, u_2, $u_3 \in H^0$. Pišme $u_i = Pu_i + Qu_i = x_i + y_i$, $i = 1, 2, 3$. Nechť $x_1 = x_2$, $u_1 - u_3 \in \mathcal{V}_\eta^+$, $u_2 - u_3 \in \mathcal{V}_\xi^-$, kde $\xi \in (0,1)$ a $\eta = \xi^{-1}$. Potom $\|y_1 - y_3\| \leq K_\xi \|y_1 - y_2\|$, kde $K_\xi = (1 - \xi^2)^{-1}$.

Lemma 4.3. [Romanov, Lemma 6.] Nechť $0 < \xi < \eta$ a $u \in \mathcal{V}_\eta^+$. Potom $\|u\|^2 \leq M_{\xi,\eta} V_\xi(u)$, kde $M_{\xi,\eta} = \frac{1+\eta^2}{\eta^2 - \xi^2}$. Speciálně, pokud $\xi \in (0,1)$ a $\eta = \xi^{-1}$, pak $\|u\|^2 \leq M_\xi V_\xi(u)$, kde $M_\xi = (1 - \xi^2)^{-1}$.

Definice. Definujme pro $\tau \geq 0$ a $x \in X$ zobrazení $g(\tau, x) = PS(\tau)x$.

Lemma 4.4. [Romanov, Lemma 7.] Pro každé $\tau \geq 0$ pevné je $g(\tau, \cdot)$ vzájemně jednoznačné (dokonce bi-lipschitzovské) zobrazení X na X.

Definice. Pro $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ označme

$$\chi(t, x) := \lim_{\tau \to \infty} S(t + \tau) z(\tau, x)$$

kde $z(\tau, \cdot) = [g(\tau, \cdot)]_{-1}$.

Komentář. Výraz $z(\tau, x)$ je definován díky předchozímu lemmatu, operátor $S(t + \tau)$ je definován pokud $\tau + t \geq 0$, tedy pro τ dost velká. Existenci limity však bude nutno dokázat a je to v podstatě nějtěžší technický krok v konstrukci inerciální variety.
Naproti tomu je lehké si rozmyslet, že pokud je definováno $\chi(t, x)$, je také definováno $\chi(\tilde{t}, x)$ pro $\tilde{t} > t$, a platí $\chi(\tilde{t}, x) = S(\tilde{t} - t)\chi(t, x)$.

Lemma 4.5. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $x \in X$ je funkce $\chi(t, x)$ dobře definována.

Definice. Pro $x \in X$ označme $\psi(x) = \chi(0, x)$ a $\sigma(x) = Q\psi(x)$, patrně je $\psi(x) = x + \sigma(x)$. Budeme dokazovat, že $\mathcal{M} :=$ graf $\sigma = \{\psi(x);\ x \in X\}$ je inerciální varieta ve smyslu Věty 4.1. Snadno si rozmyslíme, že pro x, $\tilde{x} \in X$ je $\psi(x) - \psi(\tilde{x}) \in \mathcal{V}_h^-$, což po rozepsání říká, že funkce σ je h-lipschitzovská jak požadováno.

Lemma 4.6. Pro každé $x \in X$ a $t \in \mathbb{R}$ je $\chi(t, x) \in \mathcal{M}$.

Důsledek. $\mathcal{M}$ je (úplně) invariantní vůči $S(t)$, tj. pokud $u_0 \in \mathcal{M}$ a $t > 0$ je také $S(t)u_0 \in \mathcal{M}$. Naopak existuje $u_1 \in \mathcal{M}$ takové, že $u_0 = S(t)u_1$.

Lemma 4.7. $\mathcal{M}$ má stopovací vlastnost, tj. vlastnosti (6) a (7) v definici inerciální variety.