Příklad 5.1 [A priorní odhady – Věta 2.1.] Z diferenciální nerovnosti

$$\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + c_0\|\nabla u\|_2^2 \leq c_1 + c_2\|u\|_2^2$$

ukažte, že u je omezené v $L^\infty(0,T;L^2)$ a $L^2(0,T;W_0^{1,2})$; a že tento odhad závisí jen na $\|u(0)\|_2$, $T > 0$, Ω a konstantách c_i.

Příklad 5.2 Dokažte Větu 2.3: dynamický systém má globální atraktor, právě když je disipativní a asymptoticky kompaktní.

Příklad 5.3 Dokažte Lemma 2.1.

Příklad 5.4 [Odhady $\partial_t u$ pomocí rovnice.] Nechť u, v jsou slabá řešení na intervalu I. Označme $w = u - v$. Ukažte, že

$$\|\partial_t w\|_{L^2(I;W^{-1,2})} \leq K\|w\|_{L^2(I;W_0^{1,2})}$$

kde konstanta K závisí jen na datech rovnice. (Jde o druhou část důkazu Lemmatu 2.2). Ukažte speciálně, že je-li I omezený, lze normu $\partial_t u \in L^2(I;W^{-1,2})$ odhadnout pomocí normy $u \in L^2(I;W_0^{1,2})$. (To je druhá část a priorních odhadů ve Větě 2.1.)

Přesné znění uvedených tvrzení viz ,,Definice a znění vět“ v [pdf] na webu.

Nápomoc:

5.1 označte $Y(t) = \|u(t)\|_2^2 + c_0 \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2\, ds$. Danou nerovnost lze přepsat jako $Y' \leq c(1+Y)$, odsud odhadneme $Y(t)$ pomocí $Y(0)$.

5.2 $\implies$: za W lze vzít 1-okolí $\mathcal{A}$; co se týče asymp. komp., uvažte, že $\operatorname{dist}(S(t_n)u_n, \mathcal{A}) \to 0$; tedy existují $y_n \in \mathcal{A}$ t.ž. $\|S(t_n)u_n - y_n\|_X \to 0, \ldots$

$\implies$: je-li W množina z definice disipativity, definujte

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{ y \in X;\ \exists u_n \in W,\ t_n \to \infty \text{ tak, že } S(t_n)u_n \to y \}$$

Ukažte, že $\tilde{\mathcal{A}}$ je neprázdná a má všechny vlastnosti atraktoru. Inspiraci lze nalézt ve Větách 13.1 a 13.2 (o vlastnostech ω-limitních množin) v ODR2.

5.3 klíčový trik: díky lokální lipschitzovskosti $S(t)$ a invarianci $\mathcal{A}$ platí pro libovolná dvě řešení u, v ležící v atraktoru:

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq c\|u(s) - v(s)\|_2^2, \qquad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$$

kde c závisí jen na T a datech rovnice. Vhodnou integrací přes s a/nebo t se odvodí lipschitzovskost e, b, $L(\cdot)$

5.4 berte za dokázaný fakt, že $L^2(I; W^{-1,2})$ je duál k $L^2(I; W_0^{1,2})$. Stačí tedy odhadnout

$$\langle \partial_t w, \psi \rangle = \int_I \int_\Omega \partial_t w \psi$$

kde $\psi \in L^2(I; W_0^{1,2})$ má jednotkovou normu a $\partial_t w$ se dosadí z rovnice. Ve speciálním případě se volí $v = 0$.