Příklad 6.1 Dokažte Lemma 2.3.

Příklad 6.2 Nechť $\alpha < \tilde{\alpha}$ a $u \in H^{\tilde{\alpha}}$. Ukažte, že

$$\|u\|_{H^\alpha} \leq \lambda_1^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}}$$

Obecněji

$$\|Q_k u\|_{H^\alpha} \leq \lambda_{k+1}^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}}$$

Dedukujte odsud, že $P_k u \to u$ silně v H^α, $k \to \infty$. Ukažte konečně, že $H^{\tilde{\alpha}} \hookrightarrow H^\alpha$ hustě a kompaktně.

Příklad 6.3 Odhadněte exponent tloušťky (vůči normě H^0) množiny A, víte-li, že A je omezená v H^α kde $\alpha > 0$. Předpokládejte, že $\lambda_k \geq ck^{2/n}$ pro nějaké c, $n > 0$. — Takový odhad je znám pro vlastní čísla Dirichletova laplaciánu na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Příklad 6.4 (a) Ukažte, že $\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq e^{-\lambda_{k+1}t}\|u\|_{H^\alpha}$, pro $u \in Q_k H^0$. Ukažte dále, že $\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq M(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}}\|u\|_{H^0}$, kde $M(\alpha) = (\alpha/2e)^{\alpha/2}$.
(b) Kombinací předchozích odhadů ukažte, že pokud $\omega_n < \lambda_{n+1}$, pak

$$\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq M(\alpha, n, \omega_n) t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\omega_n t}\|u\|_{H^0}, \qquad u \in Q_n H^0$$

kde $M(n, \alpha, \omega_n) = \left(\frac{\alpha\lambda_{n+1}}{2(\lambda_{n+1}-\omega_n)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$. — Nyní se snadno ověří ,,technický předpoklad“ (APS) z kapitoly 3, kupř. volbou $\omega_n = \lambda_{n+1}/2$.

Přesné znění uvedených tvrzení viz ,,Definice a znění vět“ v [pdf] na webu. Viz též doplněk ke kapitole 3 ,,ARD_pozn“.

Nápomoc:

6.1 Nechť κ je lipschitzovská konstanta $L : X \to Y$, $R_0 > 0$ tak velké, že $A \subset B(0, R_0)$ a označme konečně N_0 minimální počet koulí v X o poloměru $1/4\kappa$, pokrývajících jednotkovou kouli v Y. Opakovaným užitím rovnosti $A = L(A)$ ukažte, že A lze pokrýt koulemi v X o poloměru $2^{-k}R_0$, jejichž počet nepřesahuje N_0^k. Užijte Lemma 1.7.

6.3 Připomeňte si definice čísla $d(X, \varepsilon)$ a exponentu tloušťky $\tau(X)$ (před Větou 1.10). Z předchozího příkladu víme, že pokud norma A v H^α je omezená konstantou c, pak vzdálenost (v normě H^0) množiny A od k-dimenzionálního prostoru $P_k H^0$ je nejvýše $\lambda_{k+1}^{-\alpha/2} c$. Díky dolnímu odhadu na λ_k máme odsud horní odhad na $d(A, \varepsilon)$ a konečně odhad $\tau(A) \leq n/\alpha$.

6.4 (a) V případě tzv. multiplikativních operátorů $T : \sum_j c_j u_j \mapsto \sum_j \mu_j c_j u_j$ je norma $H^\alpha \to H^\alpha$ rovna $\sup_j \mu_j$. Normu $u \mapsto e^{-tA}u$ z H^0 do H^α lze ekvivalentně chápat jako normu $u \mapsto A^{\alpha/2} e^{-tA}$ z H^0 do H^0, což je opět multiplikativní operátor s $\mu_j = \lambda_j^{\alpha/2} e^{-t\lambda_j}$; stačí tedy vyšetřit supremum funkce $\lambda \mapsto \lambda^{\alpha/2} e^{-t\lambda}$ pro $\lambda \geq 0$.

(b) Pišme $e^{-tA} = e^{-t_1 A} e^{-t_2 A}$ a použijme výše odvozené odhady norem $e^{-t_1 A} : H^\alpha \to H^\alpha$ a $e^{-t_2 A} : H^0 \to H^\alpha$. Volme rozklad $t = t_1 + t_2$ tak, že $\lambda_{n+1} t_1 = \omega_n t$.