Pozn. platí následující:

Věta Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité v bodě x_0.
Potom: $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ jsou spojité v bodě x_0. Pokud $g(x_0)\neq 0$, tak i $\frac{f(x)}{g(x)}$ je spojité v bodě x_0.

Věta. Nechť $f(x)$ je spojité v bodě x_0, nechť $g(y)$ je spojité v bodě $y_0=f(x_0)$.
Pak $g\circ f(x)$ je spojité v bodě x_0

Dk. Věta 2.5 z VoAL resp. VoLSF

Věta 2.14 Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojité v intervalu I. Pak i fce $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ jsou spojité v I. Pokud $g(x)\neq 0$ pro $\forall x\in I$, pak i $\frac{f(x)}{g(x)}$ je spojité v I.

Dk. pro $\frac{f(x)}{g(x)}$ ... dle V.2.13 stačí ukázat:

pro $\forall x_0\in I$ je $\frac{f(x)}{g(x)}$
α) spojité zleva, není-li x_0 levý krajní
β) spojité zprava, není-li x_0 pravý krajní

ad α) $x_0 \in I$ není levý krajní $\overset{V.2.13}{\Longrightarrow}$ $f(x), g(x)$ spojité v $x_0 \in I$ zleva

$\overset{V.2.12}{\Longrightarrow}$ $f(x) \to f(x_0)$
$g(x) \to g(x_0)$, $x \to x_0-$

dle VoAL $\Longrightarrow$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, $x \to x_0$

$(g(x_0) \neq 0)$

$\overset{V.2.12}{\Longrightarrow}$ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ spojité v x_0 zleva

---

Věta 2.15 Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá v J, nechť $f(I) \subset J$. Potom $g \circ f(x)$ je spojitá v I.

Dk. cíl: $\forall x_0 \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}(g(f(x_0)), \varepsilon)$$

$x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ dáno: polož $y_0 = f(x_0)$

$\exists \eta > 0$: $y \in \mathcal{U}(y_0, \eta) \cap J \Rightarrow g(y) \in \mathcal{U}(g(y_0), \varepsilon)$

$\exists \delta > 0$: $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(\underbrace{f(x_0)}_{= y_0}, \eta)$

víme: $\forall x \in I: f(x) \in J$

$$f(x) \in \mathcal{U}(y_0, \eta) \cap J$$

$$x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow g(f(x)) \in \mathcal{U}(\underbrace{g(y_0)}_{= g(f(x_0))}, \varepsilon)$$

Věta A.4* Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina.
Pak $\exists S \in \mathbb{R}^*$ t.ž. $S = \sup M$, tj.

$$(i)\ \forall x \in M: x \leq S$$

$$(ii)\ \forall S' < S\ \exists y \in M: y > S'$$

Dk. 1. $M \neq \emptyset$, shora omez. $\Rightarrow$ viz Věta A.4

2. $M = \emptyset$: značím: $\sup M = -\infty$.

3. $M \neq \emptyset$, shora neomezená: $\sup M = +\infty$.

ad (ii) $S' < +\infty$; BÚNO: $S' > 0$

$$\Rightarrow \exists y \in M: y > S'$$

Věta A.4*' Každá $M \subset \mathbb{R}$ má $\inf M \in \mathbb{R}^*$.

Lemma 2.2 (Charakterisace intervalu)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ má následující vlastnost

$$\boxed{(\ast)\quad \alpha, \beta \in M \ \&\ \gamma \text{ je mezi } \alpha, \beta \Rightarrow \gamma \in M}$$

Pak M je nutně interval.

Dk. polož $a = \inf M$, $b = \sup M$. $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \leq b$

zřejmě: $M \subset [a, b]$

ukážu: $(a, b) \subset M$ ($\Rightarrow$ jsem hotov, M interval s kraj. body a, b)

$\gamma \in (a, b)$ libovolné: $\gamma < b = \sup M$

$\Rightarrow \exists \beta \in M : \beta > \gamma$

$\gamma > \alpha = \inf M$

$\Rightarrow \exists \alpha \in M : \alpha < \gamma$

tj. γ je mezi $\alpha, \beta \in M \overset{(\ast)}{\Longrightarrow} \gamma \in M$.

Důsl. ① $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f(x)$ spojitá v I

$\Rightarrow J := f(I)$ je interval

Dk. Věta 2.16 $\Leftrightarrow f(I)$ má vlastnost (μ)

dle L.2.2 $\Rightarrow f(I)$ je interval.

② důkaz Věty B ($\exists$ odmocniny); mění:

$\sqrt[n]{x}$ rostoucí, spojitá v $[0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ sudé

resp. spojitá v $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ liché.

Dk. strategie: inverzi $f(x) = x^n$.

$n=2$ $\quad f(x) = x^2, \quad x \in I = [0, +\infty)$

spojitá, rostoucí: $0 \le x < y \Rightarrow 0 \le x^2 < y^2$

$J := f(I)$ ... přijme: $0 = \min J$

dle ① J interval $\qquad J$ shora neomezený

(neboť $f(x) \to +\infty, x \to +\infty$ dle VoAL)

$\Rightarrow$ nutně $J = [0, +\infty)$

označ $\sqrt{y} := f_{-1}(y)$: je rostoucí, spojitá v $[0, +\infty) = J$, dle Věty 2.17

$n=3$ $f(x)=x^3$, $x\in I=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

... spojité, rostoucí: $x<y \Rightarrow x^3<y^3$
(rozliš: $x<y\le 0$, $x<0\le y$,
$0\le x<y$)

$f(x)\to\pm\infty$, $x\to\pm\infty$ (dle VoAL)

$\Rightarrow$ množ. $J:=f(I)=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

označ. $\sqrt[3]{y}:=f_{-1}(x)$ ... rostoucí, spojité

v $J=\mathbb{R}$ (V.2.17)