Věta E. Existuje fce $e^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ t.ž. platí:

1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$
2. e^x rostoucí, spojité v $\mathbb{R}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Pozn. Věta D $\Rightarrow$ Věta E (polož $\exp = (\ln)_{-1}$)

Věta E $\Rightarrow$ Věta D (polož $\ln = (\exp)_{-1}$)

Dále platí:

- $e^0 = 1$, neboť $\cancel{e^0} = e^{0+0} = e^0 \cdot \cancel{e^0}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, neboť $1 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x}$
- $e^{nx} = (e^x)^n$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

dk.: Bernoulli: $(1+a)^n \geq 1 + na$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

$e^1 = e > 1$, tj: $e = 1 + a$, $a > 0$

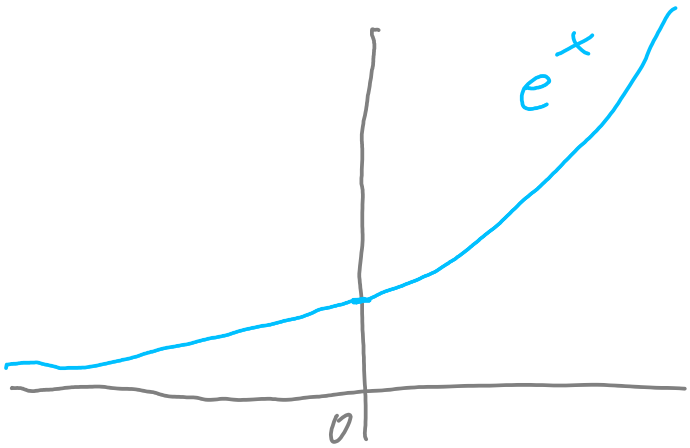
$\Rightarrow e^n = (1+a)^n \geq 1 + na > na$

$\Rightarrow$ e^x je shora neomezená, rostoucí

Věta 2.11 $\Rightarrow$ $e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\frac{1}{e^x}}$$

$\frac{1}{e^x} \to 0$, VOAL



Růstové škály:

$$\frac{x^a}{e^{bx}} \to 0, \quad x \to +\infty$$

$$\frac{e^{bx}}{x^a} \to +\infty, \quad x \to +\infty$$

$(a, b > 0)$

Aplikace:

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow y(x) = e^x$$

Pozn. x^a ... různé definice:

① aritmeticky: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-krát}}$, $n \in \mathbb{N}$

$x^0 = 1$

$0^0 = 1$ (prázdný součin)

$x \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

$$x^2 - 2x + 3 = 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0$$

$$x^{-m} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m\text{-krát}}} \quad ; \ m \in \mathbb{N}$$

$$x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$$

(2) Věta B: $\sqrt[n]{x}$ … inverze fce x^n

$x \in [0, +\infty)$, n sudé

$x \in \mathbb{R}$, n liché

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x$$

(3) obecná mocnina: $x^a := e^{a \cdot \ln x}$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\underline{x > 0}$

Platí: $\boxed{x > 0}$: $x^2 \overset{(3)}{=} e^{2 \cdot \ln x} = (\underbrace{e^{\ln x}}_{=x})^2 \overset{(1)}{=} x^2$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

dk.: $y = x^{\frac{1}{n}} \overset{(3)}{=} e^{\frac{1}{n} \cdot \ln x}$

$$y^n = \left(e^{\frac{1}{n} \cdot \ln x}\right)^n = \underbrace{e^{\frac{n}{n} \cdot \ln x}}_{=x}$$

(2) $\Rightarrow$ $y = \sqrt[n]{x}$

$x \leq 0$: POZOR : $\sqrt[3]{-1} = -1$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = e^{\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \ln(-1)}_{??}}$$

$$\overline{\sqrt{x^2} = |x|}$$

$$\underline{-1} = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \overset{(*)}{=} \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = \underline{1}$$

Problém : $x^{a \cdot b} = (x^a)^b$ $\boxed{\forall x > 0,}$ $a, b \in \mathbb{R}$