Def: Diferenciální rovnicí řádu n rozumíme:

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Řešení je $y = y(x)$, $x \in I$

t.ž.: $y \in C^n(I)$ a $F(x, y(x), y'(x), \dots y^{(n)}(x)) = 0$,

pro $\forall x \in I$.

Typ 1. $$y' + ay = f(x)$$ $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \dots$ fce

postup řešení:

$$y'(x) + ay(x) = f(x) \quad / \, e^{ax}$$ „integrační faktor"

$$\underbrace{e^{ax}y'(x) + ae^{ax}y(x)} = e^{ax}f(x)$$

$$\left(e^{ax}y(x)\right)' = e^{ax}f(x) \quad \int dx$$

$$e^{ax}y(x) = c + \int e^{ax}f(x)\,dx$$

$$y = e^{-ax}\left(c + \int e^{ax}f(x)\,dx\right)$$

počáteční podmínka: $y(x_0) = y_0$

Př. $y' + 2y = x \quad / \, e^{2x}$

$$\underbrace{e^{2x} \cdot y' + \underbrace{2e^{2x}}_{= (e^{2x})'} \cdot y}_{(e^{2x} y)'} = x e^{2x} \quad \int dx$$

$$\Rightarrow \quad e^{2x} y = c + \underbrace{\int x e^{2x} dx}_{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x}}$$

CELKEM: $y = e^{-2x} \left(c + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x} \right)$

$$\boxed{y = c e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.} \quad \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

Typ 2: $y'' + a y' + b y = f(x)$ — $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) \dots$ fce

řešení: 1. (homogenní úloha)

$$y'' + a y' + b y = 0$$

Ansatz: $\boxed{y = e^{\lambda x}}$ $\rightarrow$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a \lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\boxed{p(\lambda)}} \cdot \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$\boxed{p(\lambda)}$ charakteristický polynom fundamentální systém

Diskuse:

1) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$: $\quad e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, 2-násobný: $\quad e^{\lambda x},\ x e^{\lambda x}$

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta \ (\beta \neq 0)$: $\quad e^{\alpha x} \cos \beta x,\ e^{\alpha x} \sin \beta x$

$$\left(e^{\lambda x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot \underbrace{e^{i\beta x}}_{= \cos \beta x + i \sin \beta x} \right)$$

Př.: $y'' - y = 0 \rightsquigarrow \chi(\lambda) = \lambda^2 - 1,\ \lambda = \pm 1$

$\rightarrow$ F.S. $\{e^x, e^{-x}\}$

obecné řešení: $y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Př.: $y'' + 6y' + 13y = 0 \rightsquigarrow \chi(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 13$

$\lambda = -3 \pm 2i$

$\rightsquigarrow$ F.S. $\{e^{-3x} \cos 2x,\ e^{-3x} \sin 2x\}$

obecné řešení: $y_H = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

$x \in \mathbb{R}$

Př: $y'' = 0$ ... $\lambda(x) = \lambda^2$ .. $\lambda = 0$ 2-násob. kořen

$$F.S.: \{e^{0x}, xe^{0x}\} = \{1, x\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_H = C_1 + C_2 x}, \ c \in \mathbb{R}$$

---

2. obecná úloha: $y'' + ay' + by = f(x)$

$\rightsquigarrow$ obecné řešení $y_0 = \underbrace{y_H}_{} + \underbrace{y_P}_{}$

$\uparrow$ řeš. homogenní úlohy (viz výše)

$\uparrow$ partikulární řešení (viz dále)

Partikulární řešení: omezíme se na případ $f(x)$ tzv. ve speciálním tvaru:

$$f(x) = q(x)e^{\lambda x}$$

nebo

$$e^{\mu x}\left(q_1(x)\cos \nu x + q_2(x)\sin \nu x\right)$$

$q(x), q_1(x), q_2(x)$ ... polynomy

→ y_p lze nalézt v analogickém tvaru,

tj. $$\boxed{\begin{array}{l} r(x)e^{\lambda x} \quad \text{nebo} \\ e^{\mu x}\left(r_1(x)\cos\nu x + r_2(x)\sin\nu x\right)\end{array}}$$

$r(x), r_1(x), r_2(x)$ ... polynomy

Př. $y'' - y = x - 1$ ... $f(x) = \underbrace{r(x)}_{\text{stupně } 1} \cdot e^{0\cdot x}$

→ $y_p = q(x)\cdot e^{0\cdot x} = Ax + B$

$y_p'' = 0$

$$y_p'' - y_p \stackrel{?}{=} x - 1$$

$$-(Ax+B) = x - 1$$

$$-Ax - B = x - 1$$

→ $A = -1, B = 1$

→ $y_p = -x + 1$

→ obecné řešení: $y_o = y_H + y_p$

$$\boxed{= c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - x + 1, \quad x \in \mathbb{R}}$$

Př.

$$y'' - y = e^x \quad \ldots \quad f(x) = 1 \cdot e^x$$

$$y_p = \cancel{A \cdot e^x}$$
$$= (Ax+B)e^x$$

$$\rightsquigarrow \quad y_p'' = (Ax + 2A + B)e^x$$

$$y_p'' - y_p = e^x$$

$$(\underline{Ax} + 2A + \underline{B})\cancel{e^x} - (\underline{Ax} + \underline{B})\cancel{e^x} = \cancel{e^x}$$

$2A = 1$, tj.

$$\rightsquigarrow \quad y_p = \frac{x}{2} e^x \qquad A = 1/2$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x, \quad x \in \mathbb{R}}$$

Př.

$$y'' + y = \cos \nu x \qquad \nu > 0 \ldots \text{frekvence „síly“}$$

1. homogenní úloha:

$$y'' + y = 0 \qquad \text{F.S. } \{\cos x, \sin x\}$$

$$\rightsquigarrow \quad \chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 \rightsquigarrow \lambda = \pm i \qquad („\mathrm{Re}/\mathrm{Im}\ e^{ix}“)$$

$$\rightsquigarrow \quad y_H = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

2. partikulární řešení:

$$y_p = \begin{cases} A \cdot \cos \nu x + B \cdot \sin \nu x, & \nu \neq 1 \\ x(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x), & \nu = 1 \end{cases}$$

Speciálně: $\nu = 2$ $\quad \boxed{y'' + y = \cos 2x}$

$$\rightsquigarrow \quad y_p = A \cdot \cos 2x + B \cdot \sin 2x$$

$$\rightsquigarrow \quad A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \text{ tj.}$$

$$y_p = -\frac{1}{3} \cos 2x$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

Speciálně: $\nu = 1$ $\quad \boxed{y'' + y = \cos x}$

$$\rightsquigarrow \quad y_p = Ax \cdot \cos x + Bx \cdot \sin x$$

$$\rightsquigarrow \quad B = \frac{1}{2}, \; A = 0, \text{ tj. } y_p = \frac{x}{2} \sin x$$

$$\rightsquigarrow \quad y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$