poslední úprava 21. října 2025

1. Úvod. Reálná čísla. Funkce.

Používané značení. Pro P, Q výroky, x, y, z prvky, A, B, M množiny:

$P \,\&\, Q$ .... P a zároveň Q
$P \vee Q$ .... P nebo Q
$P \implies Q$ .... P implikuje Q
$P \iff Q$ .... P je ekvivalentní Q
$\neg P$ .... negace P

$\forall x$ .... pro každé x
$\exists x$ .... existuje x
$\exists! x$ .... existuje jediné x

$x \in A$ .... x je prvkem množiny A
$A \subset B$ .... A je podmnožina B
$\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ .... množina s prvky $a_1, a_2, \dots, a_N$
$\{x \in M;\ \varphi(x)\}$ .... množina všech prvků M s vlastností $\varphi(x)$
$\emptyset$ nebo $\{\}$ .... prázdná množina

$A \cup B$ .... sjednocení množin
$A \cap B$ .... průnik množin
$A \setminus B$ .... rozdíl množin

Věta A1. (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}$.) Existuje množina reálných čísel $\mathbb{R}$, která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace '$\cdot$' (násobení) a '+' (sčítání) tak, že pro $\forall x$, y, $z \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(iv) $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$
(v) $0 \cdot x = 0$ a naopak: $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
Dále platí:
(vi) $\forall x$, $z \in \mathbb{R}$ $\exists! w \in \mathbb{R}$ tak, že $x + w = z$, značíme $w = z - x$
(vii) $\forall z$, $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$ $\exists! w \in \mathbb{R}$ tak, že $x \cdot w = z$, značíme $w = \frac{z}{x}$

Poznámky. $-x$ je zkratka za $0 - x$, x^{-1} zkratka za $1 : x$ alias $1/x$. Další standardní značení x^n, x^{-n} etc.
Z bodů (i)–(vii) lze vyvodit všechny další známé poučky, jako např. $-(-x) = x$, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ apod.

Věta A2. (Uspořádání $\mathbb{R}$.) Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace '$<$' (menší než) tak, že pro $\forall x$, y, $z \in \mathbb{R}$ platí:
(i) nastane právě jedna z možností: $x = y$ nebo $x < y$ nebo $y < x$
(ii) $x < y \,\&\, y < z \implies x < z$

(iii) $x < y \implies x + z < y + z$
(iv) $0 < x$ & $0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Poznámka. $x \leq y$ je zkratka za $(x < y) \vee (x = y)$. Z Věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např. $x^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ nebo $x < 0$ a $y < 0$ implikuje $x \cdot y > 0$ atd.

Definice. (Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$.)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (přirozená čísla)
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ (celá čísla)
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ (racionální čísla)
Intervaly s krajními body $a < b \in \mathbb{R}$:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ (otevřený)
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ (uzavřený)
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
Neomezené intervaly:
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji $|x|$ (absolutní hodnota x) jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x, & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Poznámky. Snadno se ukáže, že platí: $|x| \geq 0$, navíc $|x| = 0$ právě když $x = 0$. Dále $|\pm x| = |x|$, $|xy| = |x||y|$ a pokud $y \neq 0$, tak $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$. Vztah k součtu/rozdílu vyřešíme v následujícím.

Lemma 1.1. Nechť $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ libovolné. Potom $|b| \leq a$ právě když $-a \leq b \leq a$.

Věta 1.1. (Trojúhelníková nerovnost.) Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
(ii) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Věta B. (Odmocnina v $\mathbb{R}$.)
1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Potom $\forall a \in [0, +\infty)\ \exists! b \in [0, +\infty)$ tak, že $b^n = a$.
2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Potom $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$.
Značíme $b = \sqrt[n]{a}$, nazýváme n-tá odmocnina z a.

Poznámky.
- $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$, ale $\sqrt{-1}$ není definováno ($\sqrt{x}$ je obvyklá zkratka za $\sqrt[2]{x}$)
- POZOR: $\sqrt{x^2} = |x|$, tj. $\sqrt{x^2} = x$ pro $x \geq 0$, ale $\sqrt{x^2} = -x$ pro $x < 0$.
- $\sqrt[n]{x^n} = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, n liché.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Věta A3. (Vlastnosti $\mathbb{N}$.)
(i) (Archimédova vlastnost) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > x$
(ii) (princip indukce) Nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje:

1. $1 \in M$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$

Potom $M = \mathbb{N}$.

Poznámky.
• Archimédova vlastnost (též Eudoxova vlastnost) $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$
• indukce jinak: nechť pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a formuli ("vlastnost přirozených čísel") $\psi(n)$ platí:

1. $\psi(n_0)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : \psi(n) \implies \psi(n+1)$

Potom $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 : \psi(n)$.
• indukce ještě jinak: každá $M \subset \mathbb{N}$ neprázdná má nejmenší prvek.

Věta 1.3. Každý interval $I = (a, b)$ obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Číslo $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$. Značíme $x = \max M$.
Číslo $x \in M$ se nazve minimum (nejmenší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \geq x$. Značíme $x = \min M$.
Číslo $K \in \mathbb{R}$ se nazve horní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \leq K$.
Číslo $L \in \mathbb{R}$ se nazve dolní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \geq L$.
Množina se nazve shora omezená, má-li nějaký horní odhad; zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad. Množina se nazve omezená, je-li omezená shora i zdola.

Příklady. 1 $M = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x < 1\} \ldots 0$ je minimum, maximum neexistuje. Omezená množina.
2 $M = \mathbb{N} \ldots 1$ minimum, maximum neexistuje. Zdola omezená, shora neomezená množina.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ se nazve supremum množiny M, značíme $S = \sup M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$
(ii) $\forall S' < S\ \exists y \in M$ tak, že $y > S'$

Poznámky.
• zobecnění pojmu maximum, přesněji: je-li $x = \max M$, pak též $x = \sup M$. Může se však stát, že supremum je definováno, maximum ne; např. pro $M = [0, 1)$.
• vlastnost (i) = je to horní odhad, vlastnost (ii) = nic menšího není horní odhad. Tj. ,,supremum" je totéž co ,,nejmenší horní odhad" množiny
• existuje nejvýše jedno supremum množiny

Definice. Číslo s se nazve infimum množiny M, značíme $s = \inf M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$
(ii) $\forall s' > s \ \exists y \in M$ tak, že $y < s'$

Poznámky. Analogicky jako výše platí: infimum zobecňuje pojem minima; je to největší dolní odhad množiny. Infimum (pokud existuje) je nejvýše jedno.

Věta A4. (Úplnost $\mathbb{R}$.) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Potom existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Věta A4'. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \inf M$.

Definice. (Komplexní čísla.) Symbolem $\mathbb{C}$ značíme množinu všech čísel tvaru $x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka (platí $i^2 = -1$.) Je-li $z = x + iy$, píšeme Re $z = x$, Im $z = y$ (reálná, resp. imaginární část z).

Definice. (Rozšířená reálná čísla.) Klademe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{(+)\infty, -\infty\}$. Uspořádání a početní operace s prvky $\pm\infty$ definujeme takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $-\infty < x < +\infty$, dále $-\infty < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, dále $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0$ je $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, dále $\pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty$
- $\forall x < 0$ je $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$, dále $\pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{x}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Poznámka. Proč počítání s $\pm\infty$ definujeme právě takto? Souvisí s aritmetikou limit, viz Věta 2.7 níže.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. Funkcí (zobrazením) f z X do Y se rozumí libovolný předpis, který každému prvku z X přiřadí právě jeden prvek z Y. Značíme $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$.
Pro $M \subset X$ definuji obraz M jako

$$f(M) = \{y \in Y;\ \exists x \in M \text{ tak, že } f(x) = y\}$$

a pro $N \subset Y$ definuji vzor N jako

$$f^{-1}(N) = \{x \in X;\ f(x) \in N\}.$$

Funkce je prostá, pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Funkce je "na"(zobrazuje X na Y), pokud $f(X) = Y$.

Je-li $f : X \to Y$ prostá a "na", řekneme, že je vzájemně jednoznačná. Pak lze definovat inverzní funkci $f_{-1} : X \to Y$, která prvku $y \in Y$ přiřadí ten (jednoznačně určený) prvek $x \in X$, že $f(x) = y$.
Je-li $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, definujeme složené zobrazení (superpozici) $g \circ f : X \to Z$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.
Občas píšeme $f : X \to Y$, ačkoliv $f(x)$ není definováno pro úplně všechna $x \in X$. Pak značí D_f (definiční obor f) množinu těch $x \in X$, pro něž $f(x)$ definováno je, a H_f (obor hodnot) značí $f(D_f)$.

2. Reálné funkce. Limita a spojitost.

Úmluva. Reálnou funkcí rozumíme funkci z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. nepřipouštíme $\pm\infty$ v argumentu nebo hodnotě funkce. Podobně $\exists\delta > 0$ značí $\exists\delta \in (0, +\infty)$, tj. nepovoluje $\delta = +\infty$.
Příklad. Pro $f(x) = 1/x$ je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, třebaže je definováno $1/\pm\infty = 0$.

Definice. Reálná funkce $f(x)$ se nazve rostoucí (resp. klesající resp. nerostoucí resp. neklesající) na množině M, pokud $\forall x < y \in M$ je $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$ resp. $f(x) \geq f(y)$ resp. $f(x) \leq f(y)$). Souhrnný název: monotónní (rostoucí/klesající: ryze monotónní) funkce.
Funkce $f(x)$ na množině M se nazve:
• shora omezená, pokud $\exists K \in \mathbb{R}$ t.ž. $f(x) \leq K$, $\forall x \in M$
• zdola omezená, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$ t.ž. $f(x) \geq L$, $\forall x \in M$
• omezená, je-li zde shora i zdola omezená.
Funkce je omezená na M, právě když $\exists C > 0$ t.ž. $|f(x)| \leq C$, $\forall x \in M$.
Funkce $f(x)$ se nazve:
• sudá, pokud $x \in D_f \implies -x \in D_f \;\&\; f(-x) = f(x)$
• lichá, pokud $x \in D_f \implies -x \in D_f \;\&\; f(-x) = -f(x)$
• p-periodická, pokud $x \in D_f \implies x + p \in D_f \;\&\; f(x+p) = f(x)$

Definice. (Okolí bodu.) Nechť $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme
$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ... kruhové δ-okolí x_0
$P(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ... prstencové (redukované) δ-okolí x_0
$U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta)$ ... pravé kruhové δ-okolí x_0
$U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0]$ ... levé kruhové δ-okolí x_0
$P_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$ ... pravé prstencové δ-okolí x_0
$P_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$ ... levé prstencové δ-okolí x_0
Dále definujeme
$U(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty]$, $P(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$
$U(-\infty, \delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta})$, $P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$
$U_-(+\infty, \delta) = U(+\infty, \delta)$, $P_-(+\infty, \delta) = P(+\infty, \delta)$, $U_+(-\infty, \delta) = U(-\infty, \delta)$, $P_+(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta)$.
Pravé okolí ∞, levé okolí $-\infty$ nedefinujeme.

Poznámky.
• $\delta_1 < \delta_2 \implies U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$ ... čím menší δ, tím menší okolí (platí i u $\pm\infty$)

• $U(x_0,\delta)$ a $P(x_0,\delta)$ se liší bodem x_0, tj.

$$U(x_0,\delta) = P(x_0,\delta) \cup \{x_0\}, \qquad P(x_0,\delta) = U(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$$

• pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$U(x_0,\delta) = \big\{x \in \mathbb{R};\ |x - x_0| < \delta\big\}$$
$$P(x_0,\delta) = \big\{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x - x_0| < \delta\big\}$$

• píšeme $U(x_0)$ místo $U(x_0,\delta)$, pokud na δ nezáleží; obrat "na jistém $P(x_0)$ platí..."je zkratka za "existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P(x_0,\delta)$ platí..."

Věta 2.1. (Princip oddělení.) Nechť $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \neq x_1$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0,\delta) \cap U(x_1,\delta) = \emptyset$. Speciálně $x_0 \notin U(x_1,\delta)$, $x_1 \notin U(x_0,\delta)$.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0,\delta)$. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0, jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in P(x_0,\delta) \implies f(x) \in U(A,\varepsilon)\big]\,.$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$, nebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.
Terminologie: pokud $A \in \mathbb{R}$, jde o limitu vlastní (konečnou), pro $A = \pm\infty$ je limita nevlastní.

Poznámky.
• limita v x_0 nezávisí na $f(x_0)$, $f(x)$ nemusí být v x_0 ani definována
• názorně: x blízko x_0, ale různé od $x_0 \implies f(x)$ blízké (nebo rovné) A
• ekvivalentní zápis:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[f\big(P(x_0,\delta)\big) \subset U(A,\varepsilon)\big]\,.$$

speciálně pro x_0, $A \in \mathbb{R}$:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\big]\,.$$

• limita (pokud existuje) je nejvýše jedna

Příklady. ① $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$
② $\lim_{x\to 0} x^{-2} = +\infty$
③ Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0, \delta)$ (resp. $P_-(x_0, \delta)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $f(x) \to A$ pro $x \to x_0+$, $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$, resp. $f(x) \to A$ pro $x \to x_0-$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$.

Příklady. ① pro funkci signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

platí: $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$
② $\lim\limits_{x \to 0\pm} x^{-1} = \pm\infty$

Věta 2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existuje a rovná se A
(2) limity $\lim_{x \to x_0+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ existují a rovnají se témuž A

Lemma 2.1. (1) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$.
(2) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 limitu (i nevlastní), různou od 0. Potom $f(x)$ je na jistém $P(x_0)$ "odražená od nuly", tj.

$$\big(\exists \delta > 0\big)\big(\exists \Delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies |f(x)| > \Delta\big] .$$

Věta 2.3. (Aritmetika limit - 1. verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$
(2) $f(x) - g(x) \to A - B$
(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) pokud $B \neq 0$, tak $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
toto vše pro $x \to x_0$.

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.

Poznámka. Platí jednostranné verze uvedených vět, např.:
Jestliže $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0+$, pak $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$ pro $x \to x_0+$.

Jestliže $f(x)$ je omezená na jistém $P_-(x_0)$ a $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$, pak $f(x) \cdot g(x) \to 0$ pro $x \to x_0-$. A podobně.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Ekvivalentní zápisy:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[f\big(U(x_0, \delta)\big) \subset U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.5. (Vztah limity a spojitosti.) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existuje a rovná se $f(x_0)$
Stručně řečeno: spojité funkce jsou takové, že limitu $x \to x_0$ spočítám dosazením $x = x_0$.

Příklady.
① polynom, tj. funkce tvaru $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, je spojitý v každém $x_0 \in \mathbb{R}$
② racionální funkce, tj. funkce tvaru $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x)$, $q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$, ve kterém $q(x_0) \neq 0$
③ funkce $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ jsou spojité v každém bodě z $\mathbb{R}$; funkce $\ln x$ je spojitá v každém bodě $(0, \infty)$ - viz Kapitola 3 níže.
④ funkce $\sqrt{x}$ je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$; uvidíme později, že $\sqrt[n]{x}$ je vždy spojitá (ve svém definičním oboru)
⑤ funkce $\operatorname{sgn} x$ je spojitá všude mimo $x = 0$
⑥ funkce $F(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce, je spojitá v $x = 0$ a nikde jinde

Věta 2.6. (Limita superpozice) Nechť $f(x) \to y_0$ pro $x \to x_0$, nechť $g(y) \to A$ pro $y \to y_0$, kde A, x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je dále splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:
(a) $g(y)$ je spojitá v y_0
(b) $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$
Potom $g(f(x)) \to A$ pro $x \to x_0$.

Příklady.
① $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \to \sqrt{3}$ pro $x \to 2$
② $\dfrac{\sin(x + x^2)}{x} \to 1$ pro $x \to 0$
③ !! bez předpokladu (a) nebo (b) se nelze obejít: definuji $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Potom $f(x) \to 0$ pro $x \to 0$, $g(y) \to 0$ pro $y \to 0$, avšak $g(f(x)) \to 1$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Výrok $f(x) \to +\infty$ pro $x \to x_0$ můžeme ekvivalentně napsat jako

$$\big(\forall K > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) > K\big]\,.$$

Podobně $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$ je ekvivalentní

$$\big(\forall L < 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) < L\big]\,.$$

Věta 2.7. (Aritmetika limit - obecná verze.) Nechť $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ pro $x \to x_0$, kde A, $B \in \mathbb{R}^*$. Potom
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$
(2) $f(x) - g(x) \to A - B$
(3) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$
(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{A}{B}$
pro $x \to x_0$, má-li výraz napravo smysl.

Příklady. ① $\frac{1}{x^2+1} \to \frac{1}{(+\infty)(+\infty)+1} = 0$ pro $x \to +\infty$
② $x^3 + 3x^2 + 4 = x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) \to (-\infty)^3(1 + \frac{3}{-\infty} + \frac{4}{(-\infty)^3}) = -\infty$ pro $x \to -\infty$

Poznámka. Proč nedefinuji některé výrazy, např. $\frac{\pm\infty}{+\infty}$? Protože když $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, nelze obecně říci, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$. – Operace s $\pm\infty$ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Věta 2.8. (Limity typu $\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$.) Nechť $f(x) \to 0$ pro $x \to x_0$.
(1) Je-li $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$ pro $x \to x_0$.
(2) Je-li $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \to +\infty$ pro $x \to 0+$
② $\frac{1}{x+x^2} \to -\infty$ pro $x \to 0-$

Věta 2.9. (Zachování nerovnosti v limitě.) Nechť $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \le A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \le A$.

Poznámky.
- platí zrcadlová verze s $\ge$ místo $\le$
- neplatí verze s ostrou nerovností: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ na $P(+\infty)$, avšak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \not< 1$
- souhrně: neostrá nerovnost se v limitě zachová, ostrá se může změnit v rovnost

Věta 2.10. (O dvou policajtech.) Nechť $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.
(1) Nechť $g(x) \le f(x) \le h(x)$ platí na jistém $P(x_0)$, a nechť $g(x) \to a$, $h(x) \to a$ pro $x \to x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) \to a$ pro $x \to x_0$.
(2) Nechť $g(x) \le f(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \to +\infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to +\infty$ pro $x \to x_0$.
(3) Nechť $f(x) \le h(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $h(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$. Potom $f(x) \to -\infty$ pro $x \to x_0$.

Příklady. ① $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor+1} \to 1$ pro $x \to +\infty$, kde

$$\lfloor y \rfloor = \max\big\{k \in \mathbb{Z} : k \le y\big\}$$

je tzv. celá část y.
② $\cos x + x \to -\infty$ pro $x \to -\infty$

Věta 2.11. [O limitě monotónní funkce.] Nechť $f(x)$ je monotónní v intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$. Navíc: tyto limity jsou vlastní, právě když je $f(x)$ správným způsobem omezená.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$

respektive

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big]\,.$$

Ekvivalentní zápisy (pro spojitost zprava):

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[f\big(U_+(x_0, \delta)\big) \subset U(f(x_0), \varepsilon)\big]$$
$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x_0 \le x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big]$$

Věta 2.12.
(1) $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava, právě když $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
(2) $f(x)$ je spojitá v x_0 zleva, právě když $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$.
(3) $f(x)$ je spojitá v x_0, právě když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je v 0 spojitá zprava, nespojitá zleva.

Definice. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v I (na I, vzhledem k I), jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big]\,.$$

Poznámka. Ihned z definice plyne: je-li $f(x)$ spojitá v I, a $\tilde{I} \subset I$, pak $f(x)$ je spojitá v $\tilde{I}$.

Poznámka. U intervalu rozlišujeme vnitřní a krajní body. Bod $x_0 \in I$ je vnitřní, právě když existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \subset I$. Krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu. Tedy (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ a $[a, b]$ jsou intervaly s krajními body a, b. Vnitřními body jsou ve všech čtyřech případech body z (a, b).

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) $f(x)$ je spojitá v I
(2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním bodě I; pokud levý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zprava; pokud pravý krajní bod je prvkem I, je v něm spojitá zleva

(3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém bodě I, který není pravý krajní, a je spojitá zleva v každém bodě I, který není levý krajní

Věta 2.14.[1] Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu I. Potom funkce $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ jsou spojité v I. Jestliže $g(x)\neq 0$ pro $\forall x\in I$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v I.

Věta 2.15. (Spojitost superpozice.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá v J, kde I, $J\subset\mathbb{R}$. Nechť $f(I)\subset J$. Potom funkce $(g\circ f)(x)$ je spojitá v I.

Věta 2.16. (Darbouxova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, kde $I\subset\mathbb{R}$ je interval. Nechť γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b\in I$. Potom mezi a, b leží c takové, že $f(c)=\gamma$.

Důsledek. Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a $f(x): I\to\mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(I)$ je také interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Poznámka. Větu A4 lze zobecnit takto: Nechť $M\subset\mathbb{R}$ je neprázdná. Potom existuje $S\in\mathbb{R}^*$ tak, že $S=\sup M$. Také existuje $s\in\mathbb{R}^*$ tak, že $s=\inf M$.

Věta 2.17. (O spojitosti inverzní funkce.) Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I. Označ $J=f(I)$. Potom J je interval, $f(x): I\to J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y): J\to I$ je ryze monotónní, spojitá.

Důsledek. Důkaz Věty B (o odmocnině); navíc dostáváme, že $\sqrt[n]{y}$ je pro sudé n spojitá v $[0,+\infty)$, pro liché n je spojitá v $\mathbb{R}$.

Lemma 2.3. (1) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(+\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{y\to 0+} f(1/y)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{y\to 0-} f(1/y)\,.$$

Rovnosti chápu takto: existuje-li jedna limita, existuje i druhá a rovnají se.

Poznámky. Nechť $I\subset\mathbb{R}$ je interval. Funkci $F(x): I\to\mathbb{C}$ ztotožním s dvojicí funkcí $f_1(x): I\to\mathbb{R}$, $f_2(x): I\to\mathbb{R}$, kde $F(x)=f_1(x)+if_2(x)$, neboli $f_1(x)=\operatorname{Re}F(x)$, $f_2(x)=\operatorname{Im}F(x)$.
Limitu definuji takto: $F(x)\to A\in\mathbb{C}$ pro $x\to x_0$, jestliže $\operatorname{Re}F(x)\to\operatorname{Re}A$, $\operatorname{Im}F(x)\to\operatorname{Im}A$ pro $x\to x_0$. Spojitost analogicky: $F(x)$ je spojitá (v bodě, na intervalu), jestliže funkce $\operatorname{Re}F(x)$, $\operatorname{Im}F(x)$ jsou spojité (v bodě, na intervalu).
Tímto přechodem k reálné resp. imaginární části dokážeme např. zobecnění Věty 2.3. (o aritmetice limit) pro A, $B\in\mathbb{C}$.

3. Elementární funkce.

Věta C. Existují funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a číslo $\pi\in(0,+\infty)$ tak, že platí:

[1] Důkaz pomocí Heineho věty - kapitola 7.

1. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$,
   $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\cos(-x) = \cos(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojité v $\mathbb{R}$;
4. funkce $\sin(x)$ je rostouci v $[0, \pi/2]$ a $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$;
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou těmito vlastnostmi určeny jednoznačně.

Z 1–5 lze vyvodit všechny další známé vlastnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

- $\cos 0 = 1$, neboť $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2)\cos 0 + \cos(\pi/2)\sin 0 = \cos 0 + 0$ (dle 1, 4)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, neboť

  $$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

  (dle 1, 2, 4 a předchozího bodu)
- $|\sin(x)| \le 1$, $|\cos(x)| \le 1$ v $\mathbb{R}$ (dle předchozího bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$
  (dobrovolné domácí cvičení)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, (dle 1 a předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π-periodické (dle předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzájemně nahradit (pomocí předchozích vzorečků):
  $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$
  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
  $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
  Odvodíme následujícím trikem: položíme $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x+y$, $b = x - y$ a užijeme vzorce 1.

- další užitečné vzorce a vlastnosti:

  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

  $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

  $\sin x = 0 \iff x = k\pi$, $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ libovolné

- základní limita pro kosinus: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Věta D. Existuje funkce $\ln(x)$ z $(0, +\infty)$ do $\mathbb{R}$ taková, že

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro $\forall x,\, y \in (0, +\infty)$;
2. $\ln(x)$ je rostoucí a spojitá na $(0, +\infty)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   Funkce $\ln(x)$ je těmito vlastnostmi jednoznačně určena.

Z 1–3 plynou další vlastnosti funkce $\ln(x)$:

- $\ln 1 = 0$, neboť $\ln 1 = \ln(1.1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$, neboť $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k)\ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$, neboť $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k\ln(\sqrt[k]{x})$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Chceme ukázat, že

  $$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big[x > 1/\delta \implies \ln x > 1/\varepsilon\big]\,.$$

  Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno: protože $\ln(x)$ je rostoucí, je $\ln 2 > \ln 1 = 0$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n\ln 2 > 1/\varepsilon$. Položme $\delta = 1/2^n$.

  Potom $x > 1/\delta \implies x > 2^n \implies \ln x > n\ln 2 > 1/\varepsilon$.

- $\lim\limits_{x\to 0+} = -\infty$, neboť díky Lemmatu 2.3

  $$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \ln(1/y) = \lim_{y\to+\infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$

- $\ln((0, +\infty)) = \mathbb{R}$. Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

Věta E. Existuje funkce $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ taková, že platí:

1. $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ pro $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp(x)$ je spojitá a rostoucí v $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp(x)$ je navíc vlastnostmi 1–3 jednoznačně určena.

Samozřejmě funkce $\ln x$ a $\exp x$ jsou vzájemně inverzní. Větu E můžeme také dokázat z Věty D tak, že položíme $\exp = (\ln)_{-1}$ – všechny vlastnosti $\exp(x)$ pak plynou z vlastností $\ln(x)$ a z toho, ze jde o funkce vzájemně inverzní:

- $\exp(x)$ je rostoucí, neboť $\ln(x)$ je rostoucí
- $\exp(x)$ zobrazuje $\mathbb{R}$ vzájemně jednoznačně na $(0, +\infty)$
- vlastnost 1 plyne z vlastnosti 1 funkce $\ln(x)$, Věta D
- limita sub 3 plyne ze základní limity pro $\ln(x)$ (vlastnost 3 ve Větě D) a ze spojitosti funkce $\exp(x)$

Funkce $\exp(x)$ má tyto další vlastnosti (dokažte sami):

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Definice. (Obecná mocnina.) Pro $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$ definuji $x^a = \exp(a \ln x)$. Dále definuji $x^0 = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, speciálně též $0^0 = 1$.

Poznámka. Další důležité (základní) limity pro funkce $\ln x$, $\exp x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0,$$

pro libovolná a, $b > 0$. Heslo: logaritmus je slabší než mocnina je slabší než exponenciála. – Dokážeme později pomocí l'Hospitalova pravidla.

Poznámka. Různé definice symbolu mocnina:

- pro $a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = x \cdot x \dots x$ (násobeno n-krát)
- pro $-a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = 1/x^{-a}$ a užiji předchozí definice
- $x^0 = 1$
- pokud $a \notin \mathbb{Z}$, nezbývá než použít definici $x^a = \exp(a \ln x)$ (která ovšem pro $a \in \mathbb{Z}$ dává stejný výsledek jako tři předchozí)

Symbol $\sqrt[k]{x}$ má zvláštní význam, určený Větou B.
Rozdíly a souvislosti: pokud $x > 0$, platí všechno tak, jak očekáváme: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $(x^a)^b = x^{ab}$ atd.
Pokud ovšem $x < 0$, objeví se rozdíly: $\sqrt[3]{-1} = -1$, avšak $(-1)^{\frac{1}{3}}$ není definováno. Podobně $[(-1)^2]^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$, avšak $(-1)^{2\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ není definováno.

Definice. (Další elementární funkce.)
① $\arcsin = \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} \right)_{-1}$
② $\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)_{-1}$
③ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
④ $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}_{(-\pi/2,\pi/2)} \right)_{-1}$
⑤ $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi$

Definice. Funkce se nazve (na daném definičním oboru) elementární, jestliže je to:
(1) polynom, racionální funkce, odmocnina
(2) sin, cos, exp, ln
(3) arcsin, arccos, arctg
(4) jakákoliv další funkce, která vznikne z předchozích konečným opakováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Poznámky.
• funkce $\sinh x = \frac{1}{2}(\exp x - \exp(-x))$ (hyperbolický sinus) je zjevně elementární. Funkce k ní inverzní (zvaná argsinh) ovšem také, protože $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$
• ve skutečnosti se všechny elementární funkce dají vytvořit pomocí exp a ln, pokud povolíme komplexní argumenty: např. $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$, $\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$.
• příklad funkce, která není elementární (na žádném intervalu): Dirichletova funkce

4. Derivace

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0. Značíme $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ nebo $\left(f(x)\right)'|_{x=x_0}$.
Terminologie: pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, jde o derivaci vlastní (konečnou), pro $f'(x_0) = \pm\infty$ je derivace nevlastní.

Poznámky.
• ekvivalentní definice derivace:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• $f(x) = g(x)$ na jistém $U(x_0)$ implikuje $f'(x_0) = g'(x_0)$
• geometrický význam: směrnice tečny grafu funkce
• derivováním vznikne z funkce $f(x)$ nová funkce $f'(x)$, která má dovoleno nabývat i hodnot $\pm\infty$

Příklady. ① $c' = 0$
② $\big(x^n\big)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
③ $\big(\frac{1}{x^m}\big)' = \frac{-m}{x^{m+1}}$ pro $x \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$
④ $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$
⑤ $(\ln x)' = 1/x$ pro $x > 0$
⑥ $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$
⑦ $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$, $\mathrm{sgn}'(x) = 0$ pro $x \neq 0$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$.) Pokud existuje limita

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

respektive

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva.)
Značíme $f'_+(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_+|_{x=x_0}$ respektive $f'_-(x_0)$ nebo $\big(f(x)\big)'_-|_{x=x_0}$
Opět rozlišujeme vlastní a nevlastní derivaci zleva resp. zprava.

Poznámky.
• ekvivalentní definice jednostranných derivací:

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{respektive} \qquad \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

• z Věty 2.2 plyne ekvivalence následujících tvrzení:
(1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A
(2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se témuž A

Příklady.
① $|x|' = \mathrm{sgn}\, x$ pro $x \neq 0$; derivace v 0 neexistuje, neboť $(|x|)'_\pm|_{x=0} = \pm 1$
② $\big(\sqrt{x}\big)'_+|_{x=0} = +\infty$

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

Poznámky.
• důležité je „vlastní“: $\operatorname{sgn}(x)$ má v 0 derivaci (rovnou $+\infty$), ale není tam spojitá
• platí jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci zprava (zleva) $\Longrightarrow$ $f(x)$ je v x_0 spojitá zprava (zleva)
• obrácená implikace zdaleka neplatí: např. $|x|$ je spojitá v 0, ale nemá tam derivaci. Lze dokonce sestrojit funkci, která je spojitá všude, ale derivaci (ani jednostrannou) nemá nikde

Věta 4.2. Nechť $f(x)$, $g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0. Potom
(1) $\big(f+g\big)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) $\big(f-g\big)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
(3) $\big(fg\big)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(4) jestliže $g(x_0) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Poznámky.
• platí pro jednostranné derivace
• lze použít na vícenásobné součty, součiny atd.; např. $\big(fgh\big)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$
• v případě nevlastních derivací nemusí platí, třebaže má pravá strana smysl: polož $f(x) = 1/x$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 1$. Potom $f'(0) = +\infty$, a tedy u vzorce

$$\big(f \cdot f\big)'(0) = f(0)f'(0) + f(0)f'(0)$$

je pravá strana $+\infty$, avšak derivace funkce $f \cdot f$ v bodě 0 neexistuje

Příklady.
① $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
② $\big(e^x \sin x\big)' = e^x(\cos x - \sin x)$
③ $(x^n)' = nx^{n-1}$ (indukcí podle n)

Lemma 4.1. Nechť $f'(x_0) \neq 0$ (i nevlastní). Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Věta 4.3. (Derivace složené funkce.) Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci v x_0, nechť $g(y)$ má vlastní derivaci v bodě $f(x_0)$. Potom

$$\big(g \circ f\big)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.$$

Příklady.
① $\big[\cos(x^2)\big]' = -\sin(x^2) \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$
② $\big(\sqrt{x^2+1}\big)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$
③ $\big[f(ax+b)\big]' = af'(ax+b)$ pro každé x takové, že $f'(y)$ má v bodě $ax+b$ derivaci
④ $\big\{x^x\big\}' = x^x(1+\ln x)$, $x > 0$

⑤ $|f(x)|' = f'(x)\operatorname{sgn}\big\{f(x)\big\}$, pokud $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní

Věta 4.4. (Derivace inverzní funkce.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I. Nechť $J = f(I)$, a $f_{-1}(y) : J \to I$ je funkce inverzní k $f(x)$. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom:

(1) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\big(f_{-1}\big)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f_{-1}(y_0))}$.

(2) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) = \pm\infty$, pak $\big(f_{-1}\big)'(y_0) = 0$.

(3) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) = 0$, pak $\big(f_{-1}\big)'(y_0) = +\infty$ pokud $f(x)$ je rostoucí, a $\big(f_{-1}\big)'(y_0) = -\infty$ pokud $f(x)$ je klesající.

Příklady. ① $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$

② $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$

③ Pokud $n \geq 2$ je sudé, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $y > 0$

Pokud $n \geq 3$ je liché, tak $\big(\sqrt[n]{y}\big)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pro $y \neq 0$, a $\big(\sqrt[n]{y}\big)'|_{y=0} = +\infty$.

5. Primitivní funkce.

Úmluva. V celé kapitole značí I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme

$$\int f(x)\, dx = F(x) \qquad \text{v } I\,.$$

Terminologie: $F(x)$ se také nazývá neurčitý integrál k $f(x)$, $f(x)$ je integrand, x je integrační proměnná.

Příklady. ① $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ v $\mathbb{R}$, $n \geq 0$ celé

② $\int \dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$, $n \geq 2$ celé

③ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; obecněji $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$ v I, pokud $f'(x)$ existuje vlastní a $f(x) \neq 0$ všude v I

④ $\int e^x\, dx = e^x$, $\int \sin x\, dx = -\cos x$, $\int \cos x\, dx = \sin x$, vše v $\mathbb{R}$

⑤ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ v $(-1, 1)$, $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$

Věta 5.1. (Linearita integrálu.)
(1)

$$\int af(x) + bg(x)\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

v každém I, kde mají smysl integrály vpravo;
(2) Jestliže $\int f(y)\,dy = F(y)$ v J, pak

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

v každém I takovém, že $\{ax+b:\ x \in I\} \subset J$.

Věta 5.2. (Integrace per-partes.) Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivace pro $\forall x \in I$. Potom

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{v } I\,,$$

existuje-li integrál vpravo. **Příklady.** ① $\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ v $(0,\infty)$
② označme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $I_1 = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$, a integrací per-partes odvodíme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n \qquad n \in N\,.$$

Věta 5.3. (1. věta o substituci.) Nechť $\int g(y)\,dy = G(y)$ v J, a nechť pro každé $x \in I$ je $f(x) \in J$ a existuje $f'(x)$ vlastní. Potom

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = G(f(x)) \qquad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ v $\mathbb{R}$
② $\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ v $\mathbb{R}$

Věta 5.4. (2. věta o substituci.) Nechť $f(x)$ je definována v I, nechť $\varphi(t) : J \to I$ je vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t)$ existuje konečná a navíc je nenulová pro $\forall t \in J$. Potom: je-li

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = G(t) \qquad \text{v } J\,,$$

pak

$$\int f(x)\,dx = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) \qquad \text{v } I\,.$$

Poznámky.

• 1. věta o substituci - schematicky:

$$\int g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx \left|\begin{matrix} y = f(x) \\ dy = f'(x)\,dx \end{matrix}\right| = \int g(y)\,dy = G(y) = G\big(f(x)\big)\,.$$

Používá se v případě, že integrand má speciální tvar, tj. složená funkce krát derivace vnitřní funkce. Substituovaná funkce $f(x)$ nemusí být prostá.

• 2. věta o substituci - schematicky:

$$\int f(x)\,dx \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F(t) = F\big(\varphi_{-1}(x)\big)\,.$$

V tomto případě substituovaná funkce $\varphi(t)$ musí být vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t) \neq 0$. Druhá věta o substituci se používá hlavně v typových substitucích, viz níže.

Rozklad polynomů. Každý (nenulový) polynom $Q(x)$ lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{k} (x - a_j)^{p_j}$$

kde $a_j \in \mathbb{C}$ se nazývají kořeny, p_j jejich násobnosti. Platí $\sum_{j=1}^{k} p_j$ rovná se stupeň $Q(x)$. Důsledek: každý (nenulový) polynom je roven nule v nejvýše konečně bodech; pokud se dva polynomy shodují v nekonečně bodech, jsou nutně totožné (mají stejné koeficienty.) Pokud má $Q(x)$ reálné koeficienty a $a = \alpha + i\beta$ je kořen násobnosti p, tak $\bar{a} = \alpha - i\beta$ je také kořen (stejné násobnosti) a platí

$$(x-a)^p (x-\bar{a})^p = \big[(x-a)(x-\bar{a})\big]^p = \big[x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2\big]^p\,,$$

přičemž posledně uvedený polynom druhého stupně nemá tedy žádné reálné kořeny.
Tedy každý polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^{n} \big(x^2 + b_k x + c_k\big)^{q_k}\,, \qquad (*)$$

kde A, a_j, b_k, c_k jsou reálná čísla, tj. a_j jsou reálné kořeny $Q(x)$ násobnosti p_j, zatímco polynomy $x^2 + b_k x + c_k$ skrývají dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q_k.

Věta F. (Rozklad na parciální zlomky.) Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň P je menší než stupeň Q. Nechť $Q(x)$ má rozklad (*). Potom existují jednoznačně určená čísla A_{jr}, B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x - a_j)^s} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}$$

platí pro každé x kde $Q(x) \neq 0$.

Integrace racionální funkce. Je-li dána $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pak:

1. Pokud stupeň P je větší nebo roven stupni Q, dělením převedu na tvar

$$R(x) = p(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}\,,$$

kde $p(x)$, $\tilde{P}(x)$ jsou polynomy a stupeň $\tilde{P}$ je menší než stupeň Q.
2. Funkci $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ rozložím podle Věty F.
3. Integruji jednotlivé členy rozkladu.

Příklad.

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx$$
$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

platí v $(-\infty, 1)$ a v $(1, \infty)$.

Typové substituce. V dalším je $R = R(u, v)$ racionální funkce dvou proměnných, tj. R je z u, v vytvořena operacemi $+$, $-$, $\cdot$, $/$.
1

$$\int R\Big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx\,.$$

Substituce $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vede na integraci racionální funkce.
Příklad:

$$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}\,.$$

Polož $t = \sqrt{x-1}$, tj. $x = \varphi(t) = t^2+1$, $\varphi'(t) = 2t$ - předpoklady Věty 5.4 splněny ($I = (1,\infty)$, $J = (0,\infty)$); dostáváme

$$\int \frac{2t\,dt}{(t+1)^2} = 2\ln(t+1) + \frac{2}{t+1} \quad \text{v } J.$$

Po zpětné substituci je výsledek $2\ln(1+\sqrt{x-1}) + 2/(1+\sqrt{x-1})$ v $(1,\infty)$.
2

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx\,.$$

Používá se substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$, tj. $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} x$. Odsud

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,,$$

což vede opět na integraci racionální funkce. Pozor: substituce dává výsledek jen pro $x \in (-\pi, \pi)$.
Příklad:

$$\int \frac{dx}{2+\cos x}\,;$$

vede na integrál

$$\int \frac{2\,dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\big(\frac{t}{\sqrt{3}}\big)\,.$$

Tedy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\big)\,;$$

platí v $(-\pi,\pi)$ a díky periodicitě v každém intervalu $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$. Pokud chci primitivní funkci na delším intervalu, musím výsledek provést slepení (zespojitění) výsledné funkce

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\big)\,.$$

Například funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ F_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je primitivní k $f(x) = 1/(2+\cos x)$ v intervalu $(-\pi, 3\pi)$. Pro $x \neq \pi$ je $F_1'(x) = f(x)$ zjevné, v bodě $x = \pi$ to elegantně vyřešíme pomocí pozdějšího Lemmatu 6.2.

3

$$\int R\big(\exp(ax)\big)\,dx$$

se převede na integraci racionální funkce substitucí $t = \exp(ax)$, $dx = dt/at$.

4

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx\,.$$

Pokud $a < 0$, lze BÚNO předpokládat, že $p(x) = ax^2+bx+c$ má reálné kořeny. Přepíšeme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = \pm(x-\mu)\sqrt{\frac{a(x-\lambda)}{x-\mu}}\,,$$

čímž obdržíme integrál typu 1. Příklad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

kde $a < b$. Upravíme:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{x-a} \underbrace{\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}}_{t}$$

odtud $x = \frac{t^2b+a}{1+t^2}$, $dx = \frac{2t(b-a)}{(t^2+1)^2}dt$, integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t\,,$$

výsledek je $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$, platí v (a,b).

Pro $a > 0$ použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x\,.$$

Ta vede opět na racionální funkci, navíc lze dokázat, že splňuje předpoklady Věty 5.4. na všech intervalech, kde je $p(x) > 0$. Příklad:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,,$$

substituce

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} &= t - x \\
x^2 + x + 1 &= t^2 - 2tx + x^2 \\
x &= \frac{t^2-1}{2t+1}\,, \qquad dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt \\
\sqrt{x^2+x+1} &= t - x = \frac{t^2+t+1}{2t+1}
\end{aligned}$$

Integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1|\,,$$

výsledek lze zapsat jako

$$\ln \frac{|\sqrt{x^2+x+1}+x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}+x+1}\,,$$

platí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Poznámka. (Integrál a derivace komplexních funkcí.)
Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{C}$. Potom $F'(x) = f(x)$ značí

$$\big\{\operatorname{Re} F(x)\big\}' = \operatorname{Re} f(x)\,, \qquad \big\{\operatorname{Im} F(x)\big\}' = \operatorname{Im} f(x)\,.$$

Stejný význam má $\int f(x)\,dx = F(x)$.
Díky vzorečku (dokážeme později při přesnějším zavedení elementárních funkcí)

$$\exp[(\alpha + i\beta)x] = \exp(\alpha x)[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]$$

vyplývá, že $\exp(ax)' = a\exp(ax)$, a také

$$\int \exp(ax)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a}$$

platí pro $a \in \mathbb{C}$. Rozkladem na reálnou a imaginární část získáme užitečné vztahy

$$\begin{aligned}
\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)\big]\,, \\
\int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\big]\,.
\end{aligned}$$

6. Hlubší vlastnosti derivace a spojitosti.

Úmluva. V celé kapitole značí I, J intervaly (libovolného typu.)

Lemma 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá (resp. spojitá zprava, zleva) v bodě x_0. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $U(x_0)$ (resp. $U_+(x_0)$, $U_-(x_0)$.)

Věta 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Potom $f(x)$ je na I omezená.

Poznámka. Předpoklady nelze oslabit:
• $f(x) = 1/x$ je spojitá na $(0, 1]$, ale není omezená (interval není uzavřený)
• $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$ není omezená na $[0, 1]$ (funkce není spojitá v 0 zprava)

Definice. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vzhledem k I

- maximum (podrobně: globální maximum), je-li $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
- lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
- ostré lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) > f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.

Analogicky: řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vzhledem k I

- minimum (podrobně: globální minimum), je-li $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
- lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
- ostré lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) < f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.

Souhrnný název pro maximum a minimum: extrém.

Věta 6.2. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I. Pak existuje $x_0 \in I$ bod globálního maxima.

Poznámky. ① Předpoklady opět nelze oslabit:
• $f(x) = x$ je na $(0, 1)$ spojitá, ale maxima/minima nikde nenabývá
• $f(x) = \frac{x \sin x}{x+1}$ - má v $[0, \infty)$ nekonečně mnoho (ostrých) lokálních extrémů, ale žádné globální
② Zrcadlová verze: $f(x)$ spojitá na omezeném, uzavřeném I zde nabývá svého minima.

Věta 6.3. Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Je-li x_0 vnitřní bod I a $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, pak v x_0 není (lokální) extrém (vůči I).

Důsledek. Je-li v bodě $x_0 \in I$ (lokální) extrém, pak nutně buď (i) x_0 je krajní bod, nebo (ii) $f'(x_0)$ neexistuje, nebo (iii) $f'(x_0) = 0$.

Příklady. ① $f(x) = |x|$ má v 0 globální minimum, avšak $f'(0)$ není nula (tato derivace neexistuje)

② $f(x) = x^3$ pro $x \in I = [-1, 1]$. Maximum je v $x = 1$, minimum v -1, ale v žádném z těchto bodů není $f'(x) = 0$. Naproti tomu $f'(0) = 0$, avšak 0 není (ani lokální) extrém. Z příkladů je vidět, že ani jedna z implikací

$$f'(x_0) = 0 \implies x_0 \text{ je (lokální) extrém}$$
$$x_0 \text{ je (lokální) extrém} \implies f'(x_0) = 0$$

obecně neplatí!

Věta 6.4. (Rolleova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$, nechť $f(a) = f(b)$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 6.5. (Lagrangeova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Příklad. $\ln x < x - 1$ pro $\forall x > 1$.

Věta 6.6. Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, nechť existuje $f'(x)$ vlastní na jistém $P(x_0)$. Potom

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)\,,$$

má-li pravá strana smysl. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 zprava, nechť existuje $f'(x)$ vlastní na jistém $P_+(x_0)$. Potom

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} f'(x)\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ①

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \arcsin x = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \infty\,.$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Pro $x \neq \pm 1$ je $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ a tedy

$$f'(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \pm\infty\,.$$

Lemma 6.2. (O lepení primitivní funkce.) Nechť $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou spojité v bodě x_0. Potom též $F'(x_0) = f(x_0)$, a tedy celkem $\int f(x)dx = F(x)$ v intervalu (a, b).

Definice. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, jestliže platí: pokud γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde a, $b \in I$, pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Věta 2.16. tedy říká: funkce spojitá v intervalu zde má Darbouxovu vlastnost.

Věta 6.7.[2] Nechť $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu I a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$. Potom $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Poznámky.
• Derivace spojité funkce nemusí být obecně spojitá - avšak podle předchozí věty má aspoň Darbouxovu vlastnost.
• Pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost, nemá ani primitivní funkci (např. funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$).

Věta 6.8. (Cauchyho.) Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v $[a, b]$. Nechť pro $\forall x \in (a, b)$ existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$ a navíc $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Věta 6.9.[3] (l'Hospitalovo pravidlo.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť $f'(x)$, $g'(x)$ existují vlastní, navíc $g'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Nechť platí buď
(a) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ pro $x \to x_0$
nebo
(b) $|g(x)| \to +\infty$ pro $x \to x_0$.
Potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ①

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}\,.$$

②

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = 0\,. \qquad (a > 0)$$

③ $\frac{x}{2x+\sin x} \to 1/2$, pro $x \to +\infty$. Avšak $\frac{1}{2+\cos x}$ limitu v $+\infty$ nemá. Příklad ukazuje, l'Hospitalovo pravidlo není ekvivalentní výpočet limity: $f(x)/g(x)$ limitu může mít, i když $f'(x)/g'(x)$ jí nemá.
④ příklad, kde v zásadě l'Hospital použít jde, ale je to mnohem pracnější, než přímé použití základních limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x \ln(1 + x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\cos x \ln(1 + x^2) + \sin x \frac{2x}{x^2+1}} = \dots$$

Věta 6.10. (Monotonie a znaménko derivace.) Nechť I je interval (libovolného typu). Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) \leq 0$ resp.

[2] Bez důkazu.
[3] Důkaz jen části (a).

$f'(x) < 0$) pro všechny *vnitřní* body I. Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v I.

Příklad. $f(x) = x^n$. Protože $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$, je $f(x)$ rostoucí v $[0, \infty)$. (Srovnej důkaz Věty B.)

Důsledek. Nechť I je interval (libovolného typu). Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$ vnitřní. Potom $f(x)$ je ryze monotónní v I.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní v I, jestliže pro $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \,.$$

Pokud místo $\leq$ požadujeme $<$ resp. $\geq$ resp. $>$, jde o funkci ryze konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní.

Poznámka. Funkce $f(x)$ je konvexní v I, právě když pro $\forall a < b \in I$ a pro $\forall \lambda \in (0, 1)$ platí

$$f\big(\lambda a + (1 - \lambda) b\big) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b) \,.$$

Věta 6.11. (Konvexita a monotonie derivace.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f'(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) *uvnitř* I. Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ a tato funkce v $(-\infty, 0)$ klesá. Původní funkce je spojitá (dokonce v $\mathbb{R}$), tedy $f(x)$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0]$. Analogicky: je ryze konvexní v $[0, \infty)$. Přesto není konvexní v $\mathbb{R}$.
Snadno si rozmyslím, že $f(x)$ rostoucí v $(a, b]$, $f(x)$ rostoucí v $[b, c)$ implikuje $f(x)$ rostoucí v (a, c) – pro konvexitu tedy analogická úvaha neplatí.

Věta 6.12. (Konvexita a znaménko druhé derivace.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I, a nechť $f''(x)$ existuje konečná a $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$ resp. $f''(x) \leq 0$ resp. $f''(x) < 0$) pro všechny *vnitřní* body I. Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I.

Definice. Řekneme, že x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, jestliže
(i) existuje $f'(x_0)$
(ii) existuje $\delta > 0$ tak, že na jednom z intervalů $(x_0, x_0 + \delta)$, $(x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

Příklady. 1 $f(x) = \sin x$ má v $x = 0$ inflexní bod.
2 $f(x) = x^2$ pro $x < 0$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní na $(-\infty, 0]$, ryze konkávní na $[0, \infty)$ - ovšem $x = 0$ není dle naší definice inflexní bod: derivace $f'(0)$ neexistuje.

7. Posloupnosti.

Definice. Posloupnost je funkce $a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, přičemž místo $a(n)$ píšeme a_n. Celou posloupnost značíme $\big\{a_n\big\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ nebo krátce $\{a_n\}$.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = \frac{n^n}{n!}$ ...
② rekurentně: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; nebo $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies a_n \in U(a, \varepsilon)\big].$$

Značíme $a_n \to a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
Terminologie: pokud posloupnost má konečnou (vlastní) limitu, říkáme, že konverguje. Pokud $a_n \to \pm\infty$, říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje do $\pm\infty$.

Poznámky.
• $a_n \to a \in \mathbb{R}$ lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon\big].$$

• užitečné je následující pozorování: $a_n \to a$ právě když platí: pro každé $\varepsilon > 0$ pevné je $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně výjimek.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.
② $b_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Poznámky. Platí analogie vět pro limity funkcí (nebudeme dokazovat):
(i) Jestliže $a_n \to a$, $b_n \to b$, pak

$$a_n + b_n \to a + b$$
$$a_n b_n \to ab$$
$$a_n/b_n \to a/b$$

má-li výraz napravo smysl (srovnej VoAL: Věty 2.3, 2.7.)
(ii) Jestliže $\alpha \leq a_n \leq \beta$ pro $\forall n$, a platí $a_n \to a$, je také $\alpha \leq a \leq \beta$. Srovnej s Větou 2.9.
(iii) Je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ pro $\forall n$, a platí $b_n \to a$, $c_n \to a$, je také $a_n \to a$. Viz Věta 2.10 ("o dvou policajtech").
(iv) Jestliže $a_n \to 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, je $a_n b_n \to 0$. Srovnej s Větou 2.4.

Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazve omezená, jestliže $\exists K > 0$ tak, že $|a_n| \leq K$ pro $\forall n$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající), platí-li $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}$ resp. $a_n \geq a_{n+1}$ resp. $a_n > a_{n+1}$) pro $\forall n$.

Věta 7.1. Konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Potom $\{a_n\}$ má limitu. Je-li navíc omezená, pak konverguje (tj. má konečnou limitu.)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ pevné nastává $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n.

Poznámky.
• $a_n = (-1)^n$ má dva hromadné body: $+1$ a -1.

• $b_n = \sin n \ldots$ dá se ukázat, že hromadné body tvoří interval $[-1, 1]$.
• jestliže $a_n \to a$, tak a je hromadný bod, a je to jediný hromadný bod.

Definice. Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Řekneme, že $\{b_n\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$ (neboli posloupnost vybraná z $\{a_n\}$), existuje-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

Věta 7.3. Číslo a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, právě když z $\{a_n\}$ lze vybrat podposloupnost, jejíž limita je a.

Věta 7.4. (Bolzano-Weierstrassova.) Nechť $\{a_n\}$ je omezená. Potom $\{a_n\}$ má hromadný bod v $\mathbb{R}$.

Důsledek. Nechť $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in [a, b]$ pro $\forall n$. Potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ a podposloupnost $\{\tilde{x}_n\}$ taková, že $\tilde{x}_n \to x_0$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon\big]\,.$$

Věta 7.5. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.
(2) posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

Poznámka. V teorii je podstatné, zda posloupnost konverguje nebo nekonverguje, zatímco konkrétní hodnota limity nás nezajímá. A zde je užitečnost B.C. podmínky: umí rozhodnout, zda posloupnost konverguje, aniž hovoří o její limitě.

Věta 7.6. (Heine.) Nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
    (i) $x_n \to x_0$
    (ii) $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Poznámka. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P_+(x_0)$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = A$.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
    (i) $x_n \to x_0$
    (ii) $x_n > x_0$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A.

Poznámka. Analogicky platí: $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, právě když pro každou posloupnost, splňující $x_n \to x_0$, platí, že $f(x_n) \to f(x_0)$.

Věta 7.7. (Heineho pro spojitost v intervalu.) Nechť $f(x)$ je definována v intervalu I. Potom je ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v I.
(2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
(i) $x_n \to x_0$
(ii) $x_0 \in I$, $x_n \in I$ pro $\forall n$
platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Příklady. ① Důležitá limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

② Neexistující limita:

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\,.$$

③ Rekurentně zadaná posloupnost $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ má limitu 2.

8. Taylorův polynom.

Definice. Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány na nějakém $P(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je "malé ó $g(x)$"pro $x \to x_0$, jestliže

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Značíme: $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.
Řekneme, že $f(x)$ je "velké ó $g(x)$"pro $x \to x_0$, jestliže existují $C > 0$, $\delta > 0$ tak, že

$$|f(x)| \le C|g(x)| \qquad \forall x \in P(x_0, \delta)\,.$$

Značíme: $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.
Řekneme, že $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \to x_0$, jestliže limita

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

existuje a je konečná a nenulová. Značíme: $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Poznámky. Neformálně řečeno, tyto symboly značí (pro x velmi blízko x_0):
$f(x) = o(g(x))$ ... $f(x)$ je mnohem menší než $g(x)$
$f(x) = O(g(x))$ ... $f(x)$ lze odhadnout (konstanta krát) $g(x)$
$f(x) \sim g(x)$ ... $f(x)$, $g(x)$ se chovají v zásadě stejně.

Příklady. ① $\ln x = o(\sqrt{x})$, $x \to \infty$.
② $\frac{\sin x}{x^2+1} = O(\frac{1}{x^2})$, $x \to \infty$.
③ $\sin x \sim x$, $1-\cos x \sim x^2$, $\ln(1+x) \sim x$, vše pro $x \to 0$.

Definice. Funkce $f(x)$ je dána. Potom k-tou derivaci $f(x)$ značíme $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k}{dx^k}f(x)$ a definujeme jí induktivně takto:
(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$, neboli funkci považujeme za nultou derivaci sebe sama;
(ii) $f^{(k+1)} = \left\{f^{(k)}(x)\right\}'$, speciálně $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ atd.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že $f(x)$ je třídy C^n na I, jestliže derivace $f^{(k)}(x)$ existují a jsou spojité na I pro každé $k = 0, 1, \dots, n$. Značíme $f(x) \in C^n(I)$. Speciálně, $C^0(I) = C(I)$ je množina všech funkcí spojitých na I. Symbolem $C^\infty(I)$ značíme třídu funkcí, pro něž derivace všech řádů existují a jsou spojité na I.

Poznámka. Idea aproximace funkce polynomem spočívá v následujícím: je dána funkce $f(x)$ na okolí bodu x_0. Sestrojíme polynom $p(x)$ tak, že
$p(x_0) = f(x_0)$
$p'(x_0) = f'(x_0)$
$\vdots$
$p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$
Ukazuje se, že $p(x)$ funkci v blízkosti bodu x_0 dobře aproximuje - tím lépe, čím je větší n. Např. funkce $f(x) = \cos(x)$ v blízkosti bodu 0. Máme $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Stejnou hodnotu, první a druhou derivaci v nule má polynom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, který také funkci $\cos x$ blízko počátku - jak vidno z grafu - dobře aproximuje.

Definice. Pro x_0 pevné a $k \geq 0$ celé definujeme

$$Q_{k,x_0}(x) = \frac{1}{k!}(x - x_0)^k \,.$$

Speciálně $Q_{0,x_0}(x) = 1$ (díky úmluvě $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$), $Q_{1,x_0}(x) = x - x_0$, $Q_{2,x_0}(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2$, atd.

Lemma 8.1. Pro funkce $Q_{k,x_0}(x)$, definované výše, platí:
(1) $Q_{k,x_0}(x)$ je polynom stupně k
(2) $Q'_{0,x_0}(x) = 0$ a $Q'_{k,x_0}(x) = Q_{k-1,x_0}(x)$ pro $\forall k \geq 1$
(3) $Q^{(l)}_{k,x_0}(x_0)$ je rovno 1 pro $k = l$, zatímco pro $k \neq l$ je to 0

Definice. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom výraz

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ o středu x_0. Značíme $T^f_{x_0,n}(x)$.

Věta 8.1. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom

$$f(x) - T^f_{x_0,n}(x) = o\big((x - x_0)^n\big)\,, \qquad x \to x_0\,. \qquad (*)$$

Navíc $T^f_{x_0,n}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n, který má vlastnost (*).

Příklady. ① $T^{\exp x}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Tedy

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\,, \quad x \to 0\,.$$

② $T^{\sin x}_{0,2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, neboli

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\,, \quad x \to 0\,.$$

③ $f(x) = (1+x)^a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je pevné. Potom

$$T^{f(x)}_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k\,.$$

Tedy

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\,, \quad x \to 0\,.$$

Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$ celé definujeme zobecněné kombinační číslo jako

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & k \geq 1 \end{cases}$$

Pro $n \geq k \geq 0$ celá čísla je to ve shodě s původní definicí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Taylorův rozvoj $(1+x)^a$ můžeme elegantně napsat jako

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + o(x^n)\,.$$

Všimněte si analogie s binomickou formulí.

Věta 8.2. Nechť $F(x)$ je třídy C^{n+1} na otevřeném intervalu I, a $x_0 \in I$ je pevné. Nechť $f(x) = F'(x)$ v I. Potom
(1)

$$\left\{T^F_{x_0,n+1}(x)\right\}' = T^f_{x_0,n}(x)\,.$$

(2) Naopak: buď $p(x) = T^f_{x_0,n}(x)$, a $P(x) = \int f(x)\,dx$. Potom při vhodné volbě $c \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) + c = T^F_{x_0,n+1}(x)\,.$$

Příklady. ①

$$T^{\cos x}_{0,2n}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

②

$$T^{\ln(1+x)}_{0,n}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\,.$$

Věta 8.3.(Početní pravidla pro malé ó.)
(1) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$, kde $m \geq n$. Potom $af(x)+bg(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$.
(2) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \to 0$. Potom $f(x)g(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.
(3) Nechť $f(x) = o(x^n)$ pro $x \to 0$. Potom $x^m f(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \to 0$.
(4) Nechť $f(x) = o(x^n)$ a nechť $g(x) \sim x^m$ pro $x \to 0$, kde $m \geq 1$. Potom $f(g(x)) = o(x^{mn})$ pro $x \to 0$.

Poznámka. Stručně můžeme předchozí pravidla vyjádřit takto:
$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ pokud $m \geq n$
$o(x^n)o(x^m) = o(x^{m+n})$
$x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$
Všimněte si, že $o(x^n) - o(x^n)$ se rovná $o(x^n)$ (a ne tedy 0). To chápeme takto: rozdíl dvou funkcí, které obě jsou malé ó x^n je opět nějaká funkce, která je malé ó x^n.

Příklady. 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

2

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\right) = \frac{1}{2}$$

Definice. Nechť $f(x) \in C^n(I)$, kde I je otevřený interval a $x_0 \in I$ je pevné. Funkce

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T^f_{x_0,n}(x)$$

se nazývá Taylorův zbytek funkce po n-tém členu.

Poznámka. Z předchozího víme, že $R_{n+1}(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ pro $x \to x_0$, tj. $R_{n+1}(x)$ je malé, pokud x je blízko x_0.
Nyní nás zajímá jiný problém - totiž zda také $R_{n+1}(x) \to 0$, pokud x je pevné, zatímco n se zvětšuje.

Věta 8.4. Nechť $f(x) \in C^{n+1}(I)$, kde I je otevřený interval a x_0, $x \in I$, $x_0 \neq x$ jsou zvolena pevně. Potom mezi x, x_0 existuje θ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \tag{L}$$

Dále existuje θ mezi x, x_0 takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x-\theta)(x-x_0)^n\,. \tag{C}$$

Výraz vpravo se nazývá Lagrangeův resp. Cauchyův tvar zbytku.

9. Riemannův integrál.

Motivace. Studujeme následující problém: je dána funkce $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$, a my chceme najít číslo, které vyjadřuje plochu pod jejím grafem. Tato hodnota se nazývá určitý integrál a značí se

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Přirozené požadavky na určitý integrál:

1. $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$
2. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$ (linearita)
3. $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$ (intervalová aditivita)
4. $f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$ (monotonie)

Existuje vícero způsobů, jak definovat integrál. Ty se neliší hodnotou výsledku, nýbrž třídou funkcí, které se jimi dají integrovat. Stručně probereme dva přístupy: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Ukážeme, že pro spojité funkce dávají stejné výsledky.

Opakuj. Je-li dána $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka p.f.) k $f(x)$ v (a, b), pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b). Výraz

$$\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

nazýváme zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky.
• je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.
• situace, kdy $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b), a nechť $F(x)$ je p.f. k $f(x)$ v (a, b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\, dx = \big[F(x)\big]_a^b\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathscr{N})\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$
② $(\mathscr{N})\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$
③ $(\mathscr{N})\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\, dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathscr{N}(a, b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathscr{N}^*(a, b)$.

Poznámky.

• definice Newtonova integrálu je korektní (tj. nezávisí na volbě p.f.): plyne z jednoznačnosti p.f. až na konstantu.

• lze dokázat, že N.i. má očekávané vlastnosti: linearita, intervalová aditivita, monotonie (za vhodných předpokladů)

• kdy neexistuje $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx$? Buď neexistuje p.f., nebo výraz $\big[F(x)\big]_a^b$ nemá smysl.

Definice. Dělením D intervalu $[a,b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, kde $x_0 = a$, $x_n = b$.

Je-li $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce, definujeme pro $i = 1 \dots n$

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Čísla

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$
$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

nazýváme dolní resp. horní Riemannův součet funkce $f(x)$, příslušný k dělení D.

Definice. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom

$$(\mathscr{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx := \sup\ \big\{s(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\big\}$$

se nazývá dolní Riemannův integrál f na $[a,b]$. Analogicky,

$$(\mathscr{R})\int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx := \inf\ \big\{S(D);\ D \text{ je dělení } [a,b]\big\}$$

se nazývá horní Riemanův integrál f na $[a,b]$.

Definice. Jestliže

$$(\mathscr{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = (\mathscr{R})\int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx\,,$$

pak toto číslo nazýváme Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b, a značíme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a,b]$, píšeme $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Příklady. ① $(\mathscr{R})\int_0^1 x\,dx = 1/2$.

② Dirichletova funkce není Riemannovsky integrovatelná.

Definice. Řekneme, že dělení $\tilde{D}$ je zjemněním dělení D, pokud $\tilde{D}$ obsahuje všechny body D. Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma 9.1. Nechť $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce, nechť D, $\tilde{D}$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a,b]$.
(1) Je-li $D \subset \tilde{D}$, pak $s(D,f) \le s(\tilde{D},f)$ a $S(\tilde{D},f) \le S(D,f)$.
(2) Označíme-li $m = \inf\{f(x),\ x \in [a,b]\}$ $M = \sup\{f(x),\ x \in [a,b]\}$, je

$$m(b-a) \le s(D_1,f) \le S(D_2,f) \le M(b-a)$$

pro libovolná D_1, D_2.

Důsledek. Nechť $c_1 \le f(x) \le c_2$ pro $\forall x \in [a,b]$. Potom

$$c_1(b-a) \le (\mathscr{R})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \le (\mathscr{R})\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,dx \le c_2(b-a)\,.$$

Speciálně, je-li $f(x) = c$ pro $\forall x \in [a,b]$, je $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

Geometrický význam R.i. Nechť $\mathscr{P}$ je plocha pod grafem funkce f. Z obrázku je zřejmé, že $s(D,f) \le \mathscr{P}$ pro každé dělení, a tedy přechodem k supremu $(\mathscr{R})\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \le \mathscr{P}$. Analogicky, pro každé dělení je $S(D,f) \ge \mathscr{P}$, a tedy $(\mathscr{R})\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \ge \mathscr{P}$. Je-li tedy f Riemannovsky integrovatelná, nezbývá než $\mathscr{P} = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx$.

Lemma 9.2. $f \in \mathcal{R}(a,b)$, právě když je splněna podmínka

$$(P.R.) \qquad \big(\forall \eta > 0\big)\big(\exists \text{ dělení } D\big)\Big[S(D,f) - s(D,f) < \eta\Big]\,.$$

Věta 9.1. [R.i. a monotónní funkce.] Nechť f je monotónní, omezená v $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Lemma 9.3. Nechť f je spojitá v $[a,b]$. Potom je zde tzv. stejnoměrně spojitá, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x, y \in [a,b]\big)\Big[|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Big]\,.$$

Značení. Normou dělení D rozumíme velikost největšího dílku, tj.

$$\|D\| = \max\big\{|x_i - x_{i-1}|,\ i = 1, \dots n\big\}$$

Dále definujeme

$$\mathscr{S}(D,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

kde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ jsou libovolné body.

Věta 9.2. [R.i. a spojité funkce.] Nechť f je spojitá v $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Navíc, je-li $\{D^m\}$ libovolná posloupnost dělení takových, že $\|D^m\| \to 0$, pak posloupnosti $s(D^m,f)$, $S(D^m,f)$ a $\mathscr{S}(D^m,f)$ konvergují k $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 9.3. [Linearita R.i.] Nechť f, g jsou spojité v $[a,b]$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom

$$(\mathscr{R})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \cdot (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

Věta 9.4. [Intervalová aditivita R.i.] Nechť f je spojitá v $[a,c]$, nechť $b \in (a,c)$. Potom

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathscr{R})\int_b^c f(x)\,dx = (\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,dx$$

Poznámka. V předchozích větách stačí přepokládat f, $g \in \mathcal{R}(a,b)$.

Dodatek k definici R.i. Pro $b < a$ definujeme

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx := -(\mathscr{R})\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

má-li pravá strana smysl. Dále klademe $(\mathscr{R})\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Poznámka. S výše uvedeným dodatkem platí Věta 9.4 v tomto obecnějším tvaru: je-li f spojitá v intervalu I, a čísla a, b, $c \in I$ jsou libovolná, pak platí:

$$(\mathscr{R})\int_a^c f(x)\,dx + (\mathscr{R})\int_c^b f(x)\,dx = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Věta 9.5. [Monotonie R.i.] Nechť f, g jsou spojité v $[a,b]$. Potom

1. Je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$, pak

   $$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathscr{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

   Speciálně, $f(x) \geq 0$ v $[a,b]$ implikuje $(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2. $$\left|(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (\mathscr{R})\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Věta 9.6. [R.i. s proměnnou horní mezí.] Nechť f je spojitá v intervalu I, nechť $x_0 \in I$ je pevné. Definujme

$$F(x) := (\mathscr{R})\int_{x_0}^x f(t)\,dt\,, \qquad x \in I\,.$$

Potom:

1. $F(x)$ je spojitá v I.

2. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$ vnitřní.

Důsledky. ① Nechť $f(x)$ je spojitá v (a, b). Potom $f(x)$ má v (a, b) primitivní funkci.
② Je-li f spojitá v $[a, b]$, pak $(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx$.
③ Je-li $f \in C^1(a, b)$, pak $f(x_1) - f(x_0) = (\mathscr{R})\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\,dx$ pro libovolná x_0, $x_1 \in (a, b)$.

Poznámka. Otázka „má daná $f(x)$ primitivní funkci?" má dva aspekty:

- čistě teoreticky, odpověď je ANO, pokud $f(x)$ je spojitá, (viz výše). Naproti tomu odpověď je NE, pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost (díky Větě 6.7.)

- z praktického hlediska zní otázka malinko jinak: dokáži danou p.f. napsat vzorečkem (tj. vyjářit pomocí elementárních funkcí)? A to v mnoha případech není možné.

Často uváděný příklad: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ určitě má p.f. (je spojitá), ale dá se dokázat, že tato primitivní funkce se NEDÁ vyjádřit pomocí elementárních funkcí.