poslední úprava 11. června 2023

9. Určitý integrál – dokončení

Opakuj. Nechť $F(x)$ je definována v (a,b). Má-li výraz

$$F(b-)-F(a+)=\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x)$$

smysl, nazýváme ho zobecněným přírustkem funkce $F(x)$ od a do b. Značíme $\big[F(x)\big]_a^b$ nebo $\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a,b), a nechť $F(x)$ je p.f. k $f(x)$ v (a,b). Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx=\big[F(x)\big]_a^b,$$

má-li pravá strana smysl. Je-li $b<a$, definujeme $(\mathscr{N})\int_a^b f=-(\mathscr{N})\int_b^a f$, a dále klademe $(\mathscr{N})\int_a^a f=0$.

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný (neboli konverguje), značíme $\mathcal{N}(a,b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a,b)$.

*** Lemma 9.4.** Nechť $\Phi(x)$ je spojitá v intervalu I, nechť $\Phi'(x)=0$ pro $\forall x$ vnitřní bod I. Potom $\exists c\in\mathbb{R}$ tak, že $\Phi(x)=c$ pro $\forall x\in I$.

Důsledek. Definice Newtonova integrálu je korektní.

Poznámka. [Základní vlastnosti N.i.] Nechť $f(x)$, $g(x):(a,b)\to\mathbb{R}$. Potom
① [linearita]

$$(\mathscr{N})\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx=\alpha(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx+\beta(\mathscr{N})\int_a^b g(x)\,dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.
② [intervalová aditivita] Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě $c\in(a,b)$. Potom

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx=(\mathscr{N})\int_a^c f(x)\,dx+(\mathscr{N})\int_c^b f(x)\,dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.
③ [monotonie] (i) Je-li $f\ge 0$, pak

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx\ge 0\,.$$

(ii) Obecněji, je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in (a,b)$, je

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx \geq (\mathscr{N})\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

(iii)

$$\left|(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (\mathscr{N})\int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

(Mají-li všechny uvedené integrály smysl.)

Věta 9.7. [Per-partes pro N.i.] Nechť existují vlastní $u'(x)$, $v'(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Potom

$$(\mathscr{N})\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - (\mathscr{N})\int_a^b u(x)v'(x)\,dx\,,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathscr{N})\int_0^1 x^p \ln x\,dx = -1/(p+1)^2$, pro $p > -1$
② $(\mathscr{N})\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,dx = n!/a^{n+1}$, pro $n \geq 0$ celé, $a > 0$ libovolné.

Věta 9.8. [Substituce pro N.i.] Nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$, nechť $\varphi(u) : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je ryze monotónní, vzájemně jednoznačná funkce, a nechť $\varphi'(u)$ existuje konečná a nenulová všude v (α,β). Potom

$$(\mathscr{N})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathscr{N})\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du\,,$$

má-li jedna strana smysl (pak ho má i druhá a rovnají se).

Poznámka. Pravou stranu lze napsat i jako

$$\int_{\varphi_{-1}(a+)}^{\varphi_{-1}(-b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

tj. bez absolutní hodnoty, ale pak je třeba zachovat pořadí mezí.

10. Řady

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots$. Symbol (1) $\sum_{k=1}^\infty a_k$ se nazývá řada. Posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

se nazývá posloupnost částečných součtů řady (1). Jestliže existuje (konečná nebo nekonečná) limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak číslo s nazveme součtem řady (1). Píšeme

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = s\,.$$

Terminologie: pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada konverguje. V opačném případě diverguje. Divergence řady tedy nastane, pokud buď $s_n \to \pm\infty$ (řada diverguje do $\pm\infty$), nebo $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje (řada osciluje).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
③ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, $q \in (-1,1)$
④ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ osciluje

Věta 10.1. [Nutná podmínka konvergence.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Potom $a_k \to 0$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

Věta 10.2. [Aritmetika řad.] Jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ a čísla α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

má-li pravá strana smysl. Speciálně, konvergují-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak také $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergují.

Lemma 10.1. Nechť a_k, b_k se liší jen v konečně členech. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Lemma 10.2. Nechť $a_k \geq 0$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když má omezené částečné součty.

Věta 10.3. [Srovnávací kritérium - nelimitní verze.] Jsou dány řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde a_k, $b_k \geq 0$. Nechť existuje $c > 0$, n_0 takové, že $a_k \leq c\, b_k$ pro $\forall k \geq n_0$. Potom:
(i) pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(ii) pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Věta 10.4. [Podílové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ konverguje.

Poznámka. Pokud $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$, nelze obecně nic říci. Například řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverguje, pro obě přitom platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$.

* **Věta 10.5.** [Odmocninové kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom:
(i) je-li $q < 1$, tak řada konverguje;
(ii) je-li $q > 1$, tak řada diverguje.

Tvrzení. Nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$. Potom $\sqrt[k]{a_k} \to q$ pro $k \to \infty$.

Věta 10.6. [Integrální kritérium.] Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k \geq 0$. Nechť existuje funkce $f(x)$ spojitá, nezáporná a nerostoucí v $[1, \infty)$ taková, že $a_k = f(k)$ pro $\forall k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když $(\mathscr{N})\int_1^{\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

Příklady. ① Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje, právě když $a > 1$.
② Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\sqrt[3]{k})$ konveguje.

Definice. Řekneme, že a_k je řádově rovno b_k pro $k \to \infty$, jestliže $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ existuje a je konečná a nenulová. Značíme $a_k \sim b_k$.

Věta 10.7. [Srovnávací kritérium - limitní verze.] Nechť a_k, $b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ konverguje.

Věta 10.8. [Raabeho kritérium.] Nechť $a_k > 0$, nechť $k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \to p$. Potom:
(i) je-li $p > 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;
(ii) je-li $p < 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Poznámky. • uvažme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$. Protože $a_{k+1}/a_k = (k/(k+1))^2 \to 1$, podílové kritérium neumí rozhodnout; zato Raabe dává $k(a_k/a_{k+1} - 1) \to 2$, tj. řada konverguje. Vidíme, že Raabe je silnější (jemnější) nástroj než podílové kritérium.
• pokud $k(a_k/a_{k+1} - 1) \to 1$, nelze pomocí Raabeho kritéria rozhodnout.

Poznámky k $\mathbb{C}$. Pro $z \in \mathbb{C}$ je $z = x + iy$, kde $i^2 = -1$, x, $y \in \mathbb{R}$. Značíme $x = \operatorname{Re} z$ (reálná část), $y = \operatorname{Im} z$ (imaginární část).
Definujeme $\bar{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené), $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}$ (absolutní hodnota).
Platí:
(i) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$
(ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ pro $\forall z, w \in \mathbb{C}$
Konvergence v $\mathbb{C}$: pro z_n, $z \in \mathbb{C}$ píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ neboli $z_n \to z$, jestliže (formálně stejně jako v $\mathbb{R}$): $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : n \geq n_0 \implies |z - z_n| < \varepsilon$.
Ekvivalentně: $z_n \to z$ platí, právě když $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pokud s_n (posloupnost částečných součtů) má limitu v $\mathbb{C}$.
Ekvivalentně: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (v $\mathbb{C}$), právě když $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují (v $\mathbb{R}$). V takovém případě platí:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k\,.$$

Opakuj. Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m, n \geq n_0\big)\big[|b_m - b_n| < \varepsilon\big]\,. \qquad \text{(BC)}$$

Dokázali jsme (viz Věta 7.5 v ZS), že posloupnost $\{b_n\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku. Tato věta platí i pro posloupnosti v $\mathbb{C}$ a mnoha jiných prostorech (uvidíme v Kapitole 13).

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\Big]\,. \qquad \text{(BC} - \text{r)}$$

Pozorování. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ splňuje (BC-r), právě když s_n (posloupnost částečných součtů) splňuje (BC).

Věta 10.9. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, právě když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku konvergence řady (BC-r).

Věta 10.10. [O absolutní konvergenci.] Nechť $a_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Potom také řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

Definice. Nechť $a_k \in \mathbb{C}$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, tak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (která konverguje díky předchozí větě) nazveme *absolutně konvergentní.*
Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, a zároveň $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, potom řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazveme *neabsolutně konvergentní.*

* **Věta 10.11.** [Leibnizovo kritérium.] Nechť $b_k \to 0$ a nechť $\{b_k\}$ je od jistého indexu monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konverguje.

Příklad. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha}$ konverguje absolutně pro $\alpha > 1$ a neabsolutně pro $\alpha \in (0,1]$.

Lemma 10.3. [Abelova parciální sumace.] Nechť a_k, $b_k \in \mathbb{C}$, nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro $m > n$ definujme $\tilde{s}_m = \sum_{n+1}^{m} a_k$. Potom $\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \tilde{s}_m b_{m+1} + \sum_{k=n+1}^{m} \tilde{s}_k (b_k - b_{k+1})$ pro $\forall m > n$.

Analogie. Per-partes $\int ab = \tilde{s}b + \int \tilde{s}(-b)'$, kde $\tilde{s} = \int a$, tj. suma místo integrálu, diference místo derivace.

Věta 10.12. [Dirichletovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ má omezené částečné součty. Nechť $b_k \to 0$ a nechť posloupnost $\{b_k\}$ je od jistého indexu monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

* **Lemma 10.4.** Nechť $x \neq 2m\pi$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\,,$$
$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\,.$$

Důsledek. Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2m\pi$. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ mají omezené částečné součty.

Věta 10.13. [Abelovo kritérium.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) konverguje. Nechť posloupnost $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$ je omezená, a od jistého indexu monotónní. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

Poznámka. Předpoklad monotonie (Věty 10.8, 10.12, 10.13) je podstatný a nelze ho vynechat. (Stačí však monotonie od jistého indexu).
Stejně tak je podstatný předpoklad $a_k > 0$, $b_k > 0$ ve Větě 10.7. (Stačilo by obecněji, že a_k, b_k nemění znamení od jistého indexu).

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+(-1)^k}$ diverguje.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \operatorname{arctg} k}{k}$ konverguje.

Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a \geq 0 \end{cases}$$

tzv. kladnou resp. zápornou část čísla a.

Poznámka. Platí: $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$ a $0 \leq a^+$, $a^- \leq |a|$.

Příklady. ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$ konverguje absolutně.
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje neabsolutně.

Definice. Nechť a_k, $b_k \in \mathbb{C}$. Nechť existuje $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vzájemně jednoznačné zobrazení takové, že $a_k = b_{\varphi(k)}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se nazve přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Věta 10.14. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je libovolné přerovnání řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nechť buď (i) $a_k \geq 0$, nebo (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně (kde $a_k \in \mathbb{C}$). Potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

*** Věta 10.15.** Nechť $a_k \in \mathbb{R}$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, nechť $s \in \mathbb{R}^*$ je libovolné. Potom existuje přerovnání, jehož součet je s.

Poznámka. Je dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Je správná úvaha "nejdříve sečtu všechny kladné členy, pak všechny záporné, pak to složím a mám výsledek"? Formálně jde o rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- .$$

Pro absolutně konvergentní řady to platí. V případě neabsolutně konvergentní řady ne: napravo totiž je $+\infty - \infty$.

Věta 10.16. [Cauchyův součin řad.] Nechť řady $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergují absolutně. Pro $k = 0, 1, \ldots$ označme $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

a řada vlevo konverguje absolutně.

Příklad. Označ $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Tato řada konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$ a platí $E(z) \cdot E(w) = E(z+w)$ pro $\forall z,\, w \in \mathbb{C}$.

11. Mocninné řady.

Definice. Mocninnou řadou rozumíme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad\qquad (M)\,.$$

kde z_0 je střed řady, c_k jsou koeficienty řady; řadu chápeme jako funkci proměnné z. Předpokládáme c_k, z_0, $z \in \mathbb{C}$. Platí úmluva $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$, tj. řada vypadá $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$.

Poznámky. • mocninná řada ... zobecněný polynom
• mnoho funkcí se dá napsat jako součet mocninné řady, např. $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ pro $z \in \mathbb{C}$, $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$ pro $|z| < 1$.

Věta 11.1. [Poloměr konvergence.] Je dána mocninná řada (M). Potom existuje $R \in [0, +\infty]$ takové, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí:
(i) pokud $|z - z_0| < R$, tak (M) konverguje absolutně;
(ii) pokud $|z - z_0| > R$, tak (M) diverguje.

Terminologie. Číslo R z předchozí věty se nazývá poloměr konvergence řady. Množina $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$ resp. $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = R\}$ se nazývá kruh resp. kružnice konvergence. Zjevně může existovat jen jedno číslo R, které splní obě vlastnosti (i), (ii) - tj. poloměr konvergence je určen jednoznačně.

Věta 11.2. Je dána řada (M). Nechť $c_k \neq 0$ a nechť $|\frac{c_{k+1}}{c_k}| \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Příklady. ① $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada diverguje
② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ ... $R = 1$, na kružnici konvergence řada konverguje absolutně

Věta 11.3. Je dána řada (M). Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$. Potom $R = \dfrac{1}{r}$ (s úmluvou $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$) je poloměr konvergence řady.

Poznámka. Jedním z hlavních cílů kapitoly je dokázat rovnost

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}\,.$$

Formálně jde o "derivování řady člen po členu", neboli o záměnu $\sum$ a $\frac{d}{dz}$.

Řada vpravo je také mocninná řada - můžeme ji přepsat jako

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k (z - z_0)^k , \qquad \tilde{c}_k = (k+1)c_{k+1} .$$

Lemma 11.1. Řady (M_1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a (M_2) $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důsledek. Také řady $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$.
Heslo: formálním derivováním/integrováním člen po členu se nemění poloměr konvergence.

Věta 11.4. Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má poloměr konvergence $R > 0$. Označme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k , \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1} .$$

Potom $F'(z) = f(z)$ pro $\forall z \in U(z_0, R)$, kde $U(z_0, R) = \big\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\big\}$.

Poznámky. • funkce $F(z)$, $f(z)$ jsou pro $z \in U(z_0, R)$ korektně definovány, neboť dané řady konvergují absolutně (Lemma 11.1.)
• tvrzení platí ve smyslu derivace podle komplexní proměnné, tj.

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 < |h| < \delta,\ h \in \mathbb{C} \implies \left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon\Big],$$

kde $z \in U(z_0, R)$ je libovolné.
• speciální případ je i derivace podle reálné proměnné, tj. $F'(x) = f(x)$, pro každé x z intervalu $(-R, R)$

Důsledky. Na množině $U(z_0, R)$ platí:
• funkce $F(z)$ je nekonečně diferencovatelná a $F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, $F^{(3)}(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)c_k(z-z_0)^{k-3}$ atd.
• funkce $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$ je primitivní funkce k $F(z)$, tj. $\Phi'(z) = F(z)$

Příklad. $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Potom $E'(z) = E(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Věta 11.5. Nechť řada $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Potom $F^{(k)}(z_0) = k!\, c_k$ pro $\forall l = 0, 1, \dots$.

Důsledek. Nechť řada $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ má kladný poloměr konvergence. Potom n-tý Taylorův polynom funkce $F(z)$ o středu z_0 je roven n-tému částečnému součtu řady příslušné mocninné řady.

Věta 11.6. Nechť řady $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ a $\tilde{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-z_0)^k$ mají kladný poloměr konvergence. Nechť $F(z) = \tilde{F}(z)$ na jistém $U(z_0)$. Potom $c_k = \tilde{c}_k$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$.

Důsledek. Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = 0$ pro $\forall z$ z nějakého $U(z_0)$. Potom $c_k = 0$ pro $\forall k = 0, 1, \dots$.

Poznámka. Srovnej s příbuznou větou: nechť p, $\tilde{p}$ jsou polynomy, nechť $p(x) = \tilde{p}(x)$ pro nekonečně x. Potom p, $\tilde{p}$ jsou identické, tj. mají stejné koeficienty.

* **Věta E.** Existuje funkce $\exp x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, splňující:
1. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pro $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp x$ je rostoucí a spojitá v $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp x$ je těmito vlastnostmi určena jednoznačně.

Poznámka. V důkaze předchozí věty položíme

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,;$$

podobně definujeme

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,,$$

a dokážeme Větu C, s využitím následujícího Lemmatu.

Lemma 11.2. Pro $\forall x,\ y \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \exp(x + iy) &= \exp(x) \big[\cos y + i \sin y \big]\,, \\ \sin x &= \frac{1}{2i} \big[\exp(ix) - \exp(-ix) \big] = \frac{1}{i} \sinh(ix)\,, \\ \cos x &= \frac{1}{2} \big[\exp(ix) - \exp(-ix) \big] = \cosh(ix)\,. \end{aligned}$$

Definice. Funkce $F(z)$ se nazve analytická v bodě z_0, jestliže existují $c_k \in \mathbb{C}$ tak, že $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ na jistém $U(z_0)$.
Funkce se nazve analytická v množině Ω, je-li analytická v každém bodě Ω.

Příklad. Funkce $\exp(z)$ je analytická v $\mathbb{C}$, neboť lze psát $\exp z = \exp z_0 \exp(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{k!} (z - z_0)^k$.

12. Diferenciální rovnice.

Úmluva. V celé kapitole jsou I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ je reálná funkce $(n + 2)$ proměnných, která není konstantní vůči z_n. Potom výraz

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

nazveme obyčejnou diferenciální rovnicí řádu n pro neznámou funkci y proměnné x.

Řešením rovnice (1) rozumíme funkci $y(x) : I \to \mathbb{R}$, která má vlastní derivace až do řádu n všude v I, a

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

pro každé $x \in I$.

Definice. Nechť $y : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ jsou dvě řešení, přičemž interval $\tilde{I}$ je striktně větší než I, a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.
Potom $\tilde{y}$ se nazve prodloužením y, a naopak y se nazve restrikcí $\tilde{y}$.

Příklad. Funkce $y_1(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$, $y_2(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a

$$y_3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

jsou všechny řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y}$. Vidíme, že y_2, y_3 jsou dvě různá prodloužení řešení y_1. V bodě $x = 0$ nastává větvení (nejednoznačnost).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme výraz

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{2}$$

kde $F = F(x, y, z)$ je nekonstantní vůči z. Řešením rovnice (2) je funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$, přičemž $y'(x)$ existuje vlastní všude v I a $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ pro $\forall x \in I$.

Definice. Lineární ODR 1. řádu rozumíme

$$y' + a(x)y = b(x)\,. \tag{3}$$

Věta 12.1. [Řešení lineární ODR 1. řádu.] Je dána rovnice (3). Nechť $a(x)$, $b(x)$ jsou spojité v I, nechť $A(x) = \int a(x)\,dx$, $B(x) = \int b(x) \exp A(x)\,dx$ v I. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolné. Potom

$$y(x) = \exp(-A(x))\big[B(x) + c\big]$$

je řešení rovnice (3) v I. Naopak: všechna řešení rovnice (3) mají tento tvar.

Poznámka. Výraz $\exp A(x)$ se nazývá integrační faktor.

Příklad. rovnice: $y' + y\cos x = \exp(-\sin x)$, i.f.: $\exp\sin x$, obecné řešení: $y(x) = [x + c]\exp(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Definice. Rovnice

$$y' = g(y)f(x) \tag{4}$$

se nazývá rovnice se separovanými proměnnými.

Věta 12.2. [Řešení rce se sep. prom.] Je dána rovnice (4). Nechť $f(x)$ je spojitá v I, nechť $g(y)$ je spojitá a nenulová v J. Nechť $F(x)$ resp. $G(y)$ jsou p.f. k $f(x)$ resp. $1/g(y)$ v I resp. v J.

Označ $G_{-1}(z)$ funkci inverzní ke $G(y)$. Nechť konstanta $c \in \mathbb{R}$ a interval $I_c \subset I$ jsou zvoleny tak, že $F(x) + c$ leží v definičním oboru $G_{-1}(z)$ (tj. v $G(J)$) pro $\forall x \in I_c$.
Potom funkce

$$y(x) = G_{-1}(F(x) + c)\,, \quad x \in I_c$$

je řešení rovnice (4).

Poznámka. Předpoklad „F(x)+c leží oboru hodnot G" je potřeba hlídat – bezhlavý výpočet totiž může snadno vést k řešení, které řešením není.

Příklad. Rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$. Aplikací předchozí věty nacházíme dva typy řešení:
1. typ: $I = \mathbb{R}$, $J = (-\infty, 0)$, $G(y) = -\sqrt{-y}$, $F(x) = x$. Tedy $G(J) = (-\infty, 0)$, $\tilde{I} = (-\infty, -c)$. nalezené řešení $y(x) = -(x + c)^2$, $x \in (-\infty, -c)$.
Pozor: pro $x > -c$ daná funkce NENÍ řešení rovnice.
2. typ: podobně - $J = (0, \infty)$, $G(y) = \sqrt{y}$, $G(J) = (0, \infty)$. Nalezené řešení $y(x) = (x + c)^2$, $x \in (-c, \infty)$. (Opět není řešení pro $x < -c$).
3. typ: zjevně $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ je řešení.

Poznámka. V dalším se zaměříme na rovnici tvaru

$$y' = f(x, y)\,, \tag{5}$$

- tzv. rovnice vyřešená vzhledem k derivaci - která je z hlediska teorie „šikovnější" než obecný tvar (2).

Lemma 12.1. [O napojování.] Nechť $y_1(x) : (a, x_0) \to \mathbb{R}$, $y_2(x) : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ jsou řešení rovnice (5). Nechť $\lim\limits_{x \to x_0-} y_1(x) = y_0 = \lim\limits_{x \to x_0+} y_2(x)$. Nechť $f(x, y)$ je spojitá v bodě $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, x_0) \\ y_2(x), & x \in (x_0, b) \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

je řešením rovnice (5) v celém (a, b).

Příklad. Funkce

$$y(x) = \begin{cases} -(x + c)^2, & x < -c \\ 0, \ x \geq -c \end{cases}$$

(tj. napojení řešení typu 1 a 3) je řešení rovnice $y' = 2\sqrt{|y|}$ v $\mathbb{R}$.
Lemma 12.1 řeší vlastně jedinou věc: že rovnice je splněna v bodě napojení (jinde je to jasné) a říká, že to je zaručeno, slepím-li řešení spojitě. Srovnej s Lemmatem 6.2 (o lepení primitivní funkce) v minulém semestru.

Poznámka. Obecný postup řešení rovnice se separovanými proměnnými (4):

- pokud $y_0 \in \mathbb{R}$ je takové, že $g(y_0) = 0$, pak $y(x) = y_0$ je tzv. singulární (stacionární) řešení (na každém intervalu, na němž je definována $f(x)$.)

- pomocí Věty 12.2 hledám řešení $y(x): I \to J$, kde $f(x)$ je spojitá I, $g(y)$ je spojitá, nenulová v J.
- pomocí Lemmatu 12.1 nalezená řešení napojuji.

Definice. Řekneme, že řešení $y(x) : I \to \mathbb{R}$ rovnice (5) prochází bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, jestliže (i) $x_0 \in I$ a (ii) $y(x_0) = y_0$.
Řekneme, že v bodě (x_0, y_0) nastává větvení, jestliže existují dvě řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$, která tímto bodem procházejí, avšak která se neshodují na žádném okolí x_0. Tj. $\forall \delta > 0\ \exists \tilde{x} \in U(x_0, \delta)$ tak, že $y_1(\tilde{x}) \neq y_2(\tilde{x})$.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ nastává v bodě $(0, 0)$ větvení: $y_1(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^2$ pro $x > 0$ a $= 0$ pro $x \leq 0$.

Poznámka. Jestliže $y(x)$ řešení rovnice (5) prochází bodem (x_0, y_0), pak nutně $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$. Geometricky: pokud stejným bodem prochází více řešení, mají zde stejnou tečnu - jejich grafy se „dotýkají“, nemohou se „křížit“.

*** Věta 12.3.** [Peano.] Nechť $f(x, y)$ je spojitá na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází alespoň jedno řešení rovnice (5). Podrobněji: existuje $\delta > 0$ a funkce $y(x) : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, která řeší (5) a splňuje $y(x_0) = y_0$.

*** Věta 12.4.** [Picard.] Nechť funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jsou spojité na okolí bodu (x_0, y_0). Potom bodem (x_0, y_0) prochází právě jedno řešení rovnice (5).
Podrobněji: existuje $y(x)$ řešení (5) procházející (x_0, y_0), a je-li $\tilde{y}(x)$ jiné řešení, procházející (x_0, y_0), tak existuje $\delta > 0$ tak, že $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in U(x_0, \delta)$.
Speciálně: v bodě (x_0, y_0) nenastává větvení.

Příklad. Pro rovnici $y' = 2\sqrt{|y|}$ zaručují výše uvedené věty, že (i) každým bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ prochází alespoň jedno řešení a (ii) větvení může nastat jen v bodech $(x_0, 0)$.

Definice. Řešení $y(x) : I \to \mathbb{R}$ dané ODR se nazve maximální, jestliže ho nelze prodloužit, tj. neexistuje $\tilde{y}(x) : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ takové řešení, že $I \subsetneq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro $\forall x \in I$.

Poznámky. Náš cíl při řešení dané rovnice: najít všechna maximální řešení.
Řešení $y(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ rovnice (5) určitě nejde prodloužit za bod $x = b$, jestliže (i) $b = +\infty$ nebo (ii) $y(x) \to \infty$ pro $x \to b-$ a nebo (iii) $y(x) \to y_0$ pro $x \to b-$, avšak bod (b, y_0) neleží v definičním oboru funkce $f(x, y)$.
Jak poznám, že mám všechna řešení? Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a funkce $f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ jsou spojité v Ω. Jestliže najdu nějakou třídu $\{y_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}}$ řešení rovnice (5) takových, že jejich grafy vyplní celou Ω, pak díky Větě 12.4 jsou to zároveň všechna řešení, která se v Ω mohou vyskytnout.

Definice. Rovnice $y' = f(x, y)$ se nazve homogenní, pokud $f(x, y)$ splňuje $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ pro $\forall \lambda \neq 0$.
Postup řešení: položíme $y(x) = xz(x)$ – přejde na rovnici se separovanými proměnnými (pro novou neznámou funkci $z(x)$.) Pozor na bod $x = 0$.

Příklad. $x^2y' + xy = 2y^2$.

Definice. Rovnice $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, kde $\alpha \neq 0$, 1, se nazývá Bernoulliho rovnice.
Postup řešení: substitucí $z(x) = \big[y(x)\big]^{1-\alpha}$ převedeme na lineární rovnici (pro novou neznámou funkci $z = z(x)$).
Pozor na práci s odmocninou (znaménko $y(x)$ resp. $z(x)$).

Příklad. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$, tj. $\alpha = 1/2$, $z = \sqrt{y}$ vede na $z' - 2z/x = x/2$, kterou lze řešit pomocí i.f. $1/x^2$.

Definice. Systémem n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu rozumíme

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{y})\,, \tag{6}$$

tj. rovnice $y_i'(x) = F_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $i = 1, \ldots, n$, kde $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ jsou neznámé funkce, a $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou dány.
Přirozená počáteční podmínka je

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta}\,, \tag{7}$$

neboli $y_i(x_0) = \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$, kde $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Platí věty analogické Větě 12.3 a 12.4: $\boldsymbol{F}$ spojitá zaručuje lokální existenci, $\boldsymbol{F}$ třídy C^1 navíc i jednoznačnost řešení (splňujícího danou počáteční podmínku).

Definice. Rovnicí n-tého řádu, vyřešenou vůči nejvyšší derivaci, rozumíme

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,. \tag{8}$$

d'Alembertova transformace. Funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (8), právě když vektorová funkce $\boldsymbol{z}(x) : I \to \mathbb{R}^n$, kde

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\ \vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

řeší systém

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\ \vdots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= f(x, z_1, \ldots, z_n)\,. \end{aligned}$$

Počáteční podmínka $\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{\eta}$ odpovídá počáteční podmínce pro y tvaru $y(x_0) = \eta_1$, $y'(x_0) = \eta_2$, $\ldots\, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$.

Poznámka. Přirozená počáteční podmínka (tj. taková, pro níž existuje právě jedno řešení) pro rovnici 1. řádu je určená hodnotou řešení v nějakém bodě.
Pro rovnici n-tého řádu je přirozené určit n počátečních podmínek, nejčastěji hodnotu a první až $(n-1)$-tou derivaci v nějakém bodě.

Definice. Lineární diferenciální rovnicí řádu n rozumíme

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)\,. \tag{9}$$

Terminologie: $a_i(x)$ ... koeficienty rovnice, $f(x)$ ... pravá strana.
Značení $C(I)$ ... funkce $y(x) : I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, které jsou spojité; $C^k(I)$ ... funkce $y(x)$, které jsou spojité a jejichž derivace až do řádu k včetně jsou také spojité na I.
Řešením rovnice (9) rozumíme funkci $y(x) \in C^n(I)$, která splňuje (9) pro $\forall x \in I$.

Klíčový předpoklad (P). O rovnici (9) budeme předpokládat, že $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ a $f(x)$ jsou spojité v I (otevřený interval), navíc $a_0(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$.

*** Věta 12.5.** Je dána rovnice (9) a platí předpoklad (P). Nechť $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ jsou libovolné. Potom existuje jediná funkce $y(x) \in C^n(I)$, která řeší (9) na celém I, a splňuje počáteční podmínky

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \eta_1 \\ y'(x_0) &= \eta_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= \eta_n \end{aligned}$$

Poznámka. Existence řešení je zaručena na celém I (obor spojitosti a_i, f) – to je typické pro lineární rovnice. U nelineárních rovnic obecně nelze čekat více než lokální existenci řešení.

Značení. Při značení $\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(n-k)}$ můžeme rovnici (9) přepsat jako $\mathscr{L}[y] = f$. Speciální případ $f = 0$ je tzv. homogenní úloha

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{10}$$

Věta 12.6. [Struktura řešení lineární rovnice řádu n.] Nechť platí předpoklad (P). Potom:

1. Množina $\mathscr{H}$ všech řešení homogenní úlohy (10) tvoří lineární podprostor dimenze n v prostoru $C^n(I)$.

2. Množina $\mathscr{N}_f$ všech řešení úlohy (9) má tvar $\{y_p + y;\ y \in \mathscr{H}\}$, kde y_p je libovolné, pevně zvolené řešení této úlohy.

3. Nechť $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je libovolná báze $\mathscr{H}$. Definujme $U_{ij}(x) = y_j^{(i-1)}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Potom pro každé $x \in I$ je $U(x)$ regulární matice v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Terminologie. Bázi prostoru $\mathscr{H}$ nazýváme fundamentálním systémem (F.S.) rovnice (9). Pevně zvolené řešení y_p nazýváme partikulární řešení.
Matici z bodu 3. výše nazýváme Wronského maticí a její determinant se zove wronskián.

Příklad. Funkce $\{\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\}$ tvoří F.S. pro úlohu $y'' - \frac{2}{x}y' + y = 0$.

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém nebo partikulární řešení, neexistuje. Následující věta ale ukazuje, že pouhou integrací můžeme nalézt partikulární řešení, pokud už máme fundamentální systém.

Věta 12.7. [Variace konstant.] Je dána rovnice (9) $\mathscr{L}[y] = f$ a platí (P). Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém. Nechť $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$ splňují pro $\forall x \in I$ soustavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_0(x)} \,.
\end{aligned}$$

Potom funkce $y(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x)y_j(x)$ je řešením úlohy (9).

Poznámka. Soustava ve Větě 12.7. má tvar $U(x)C'(x) = B(x)$, kde $U(x)$ je regulární matice (viz Větu 12.6), $C'(x) = (c_1'(x), \dots c_n'(x))$ je neznámý vektor a $B(x) = (0, \dots, 0, \frac{f(x)}{a_0(x)})$. Můžeme tedy vyjádřit $c_j'(x)$ a integrací získat $c_j(x)$.

Definice. Rovnice

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y = f(x)\,, \tag{11}$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ jsou konstanty ($b_0 \neq 0$), se nazývá lineární ODR řádu n s konstantními koeficienty. Značíme $\mathscr{K}[y] = \sum_{k=0}^n b_k y^{(n-k)}$. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = 0 \tag{12}$$

je odpovídající homogenní úloha.

Poznámka. Hlavní myšlenka teorie rovnic s konstantními koeficienty: hledejme řešení tvaru $y(x) = \exp(\lambda x)$. Pozoruji, že $\mathscr{K}[\exp(\lambda x)] = p(\lambda)\exp(\lambda x)$, kde

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^{n-k}\,. \tag{13}$$

Tedy: je-li λ_0 kořenem polynomu $p(\lambda)$, tak funkce $\exp(\lambda_0 x)$ je řešením homogenní úlohy.

Definice. Polynom (13) se nazývá charakteristický polynom rovnice (11).

Poznámky. Každý polynom $p = p(\lambda)$ lze napsat jako

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

kde $\lambda_1, \dots \lambda_s \in \mathbb{C}$ jsou navzájem různé kořeny, a $n_1, \dots n_s$ jsou jejich násobnosti.
Platí: $n_1 + \cdots + n_s$ rovná se stupeň polynomu.
Dále: λ_0 je kořen polynomu $p(\lambda)$ násobnosti k, právě když $0 = p(\lambda_0) = p'(\lambda_0) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda_0)$, avšak $p^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.
Ke stupni polynomu: $a\lambda + b$, kde $a \neq 0$, je polynom stupně 1. Nenulová konstanta je polynom stupně 0. Identicky nulová funkce se považuje za polynom záporného stupně.

Lemma 12.2. Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Potom pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathscr{K}[x^l \exp(\lambda x)] = \exp(\lambda x) \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j} \,.$$

Důsledek. Je-li λ_0 kořen char. polynomu násobnosti k, pak funkce $\exp(\lambda_0 x)$, $x\exp(\lambda_0 x)$, $\dots$, $x^{k-1}\exp(\lambda_0 x)$ řeší homogenní úlohu (12).

Poznámka. Připomeňme tvrzení (které plyne např. jako speciální případ Věty 11.6): je-li $q(x)$ polynom a $q(x) \equiv 0$, tak nutně $q(x)$ je triviální (tj. má všechny koeficienty nulové.)
Totéž řečeno jinak: funkce 1, x, x^2, $\dots x^k$, $\dots$ jsou lineárně nezávislé.
Následující lemma můžeme chápat jako zobecnění tohoto faktu.

Lemma 12.3. Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$ jsou vzájemně různá čísla, nechť $q_j(x)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^{m} q_j(x)\exp(\lambda_j x) \equiv 0$, pak nutně $q_j(x) \equiv 0$ pro $\forall j$.

Věta 12.8. [F.S. pro $\mathscr{K}[y] = 0$.] Je dán operátor $\mathscr{K}[y]$ a $p(\lambda)$ je jeho charakteristický polynom. Nechť λ_j, $j = 1, \dots, s$, jsou jeho kořeny, a n_j, $j = 1, \dots s$, jsou odpovídající násobnosti. Potom funkce

$$x^l \exp(\lambda_j x) \qquad j = 1, \dots s,\ l = 0, \dots n_j - 1$$

tvoří fundamentální systém homogenní úlohy (12).

Příklad. $y^{(5)} - y^{(4)} - 5y^{(3)} + y'' + 8y' + 4y = 0$, charakteristický polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda+1)^3(\lambda-2)^2$$

-1 je 3-násobný, 2 je 2-násobný kořen, $\implies$ fundamentální systém:

$$\big\{ \exp(-x), x\exp(-x), x^2\exp(-x), \exp(2x), x\exp(2x) \big\}$$

obecné řešení:

$$K_1\exp(-x) + K_2 x\exp(-x) + K_3 x^2\exp(-x) + K_4\exp(2x) + K_5 x\exp(2x)$$

kde $K_i \in \mathbb{R}$ jsou konstanty.

Poznámka. V případě, že $p(\lambda)$ má komplexní kořeny:
1. možnost: celou teorii uvažujeme "komplexní", tj. hledáme řešení $y(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, počáteční podmínka $y^{(j-1)}(x_0) = \eta_j$, $j = 1, \dots, n$, kde $\eta_j \in \mathbb{C}$. Takto to funguje a nevadí mi komplexní b_k, ani komplexní kořeny.

2. možnost: chceme "reálnou"variantu, tj. hledáme jen řešení $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a máme $b_k \in \mathbb{R}$ (reálné koeficienty v rovnici.)
Z reálnosti b_k plynou dvě věci:
(i) $\lambda \in \mathbb{C}$ je kořen $p(\lambda)$ násobnosti $k \implies \overline{\lambda}$ je kořen násobnosti k
(ii) funkce $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0 \implies$ funkce $\operatorname{Re} y(x)$, $\operatorname{Im} y(x)$ řeší $\mathscr{K}[y] = 0$.
Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$ kořen násobnosti k, získáme dle V.12.10 funkce

$$\begin{gathered}\exp(\lambda x),\ x\exp(\lambda x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\lambda x)\\ \exp(\overline{\lambda}x),\ x\exp(\overline{\lambda}x),\ \dots, x^{k-1}\exp(\overline{\lambda}x)\end{gathered}$$

místo nich ale vezmeme jejich reálné a imaginární části

$$\begin{gathered}\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ x\exp(\alpha x)\cos\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\cos\beta x\\ \exp(\alpha x)\sin\beta x,\ x\exp(\alpha x)\sin\beta x,\ \dots, x^{k-1}\exp(\alpha x)\sin\beta x\end{gathered}$$

- tak dojdeme k "reálné"verzi fundamentálního systému.

Příklad. $y'' + y = 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, kořeny $\pm i$. F.S.=$\{\exp(ix), \exp(-ix)\}$. Reálná verze F.S.: $\{\cos x, \sin x\}$.

Definice. Rovnice

$$\mathscr{K}[y] = q(x)\exp(\lambda_0 x)\,, \tag{14}$$

kde $q(x)$ je polynom, se nazývá rovnice se speciální pravou stranou.
Pravá strana je ten typ funkce, kterým se zabývá Lemma 12.2., a ze kterých umíme sestavit fundamentální systém (Věta 12.8.) Uvidíme, že v této situaci lze řešení uhodnout jako funkci předepsaného tvaru.

Poznámka. Nechť $q_s(x)$, $s = 0, \dots m$ jsou polynomy, kde stupeň q_s je s. Potom pro libovolný polynom $q(x)$ stupně m existují (jednoznačně určené) konstanty c_s, $s = 0, \dots m$ takové, že $q(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s q_s(x)$.

Věta 12.9. Je dána úloha (14), kde $q(x)$ je polynom stupně m. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost λ_0 coby kořene charakteristického polynomu ($k = 0$ pokud λ_0 není kořen.)
Potom existuje $r(x)$ polynom stupně m takový, že $y(x) = x^k r(x)\exp(\lambda_0 x)$ je řešení (14).

Příklad. $y'' - y' - 2y = (x + 1)\exp(2x)$. $\lambda_0 = 2$ je jednoduchý kořen char. polynomu, stupeň $q(x) = x + 1$ je 1. Hledám řešení ve tvaru $y(x) = xr(x)\exp(2x)$, kde $r(x) = Ax + B$ je polynom stupně 1.
Dosazením do rovnice $A = 1/6$, $B = 2/9$.

*** Věta 12.9.'** Je dána úloha

$$\mathscr{K}[y] = \exp(\alpha x)\big[q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x\big]\,, \tag{15}$$

kde q_1, q_2 jsou polynomy stupně $\leq m$. Nechť $k \geq 0$ vyjadřuje násobnost čísla $\lambda = \alpha + \beta i$ coby kořene charakteristického polynomu.

Potom existují polynomy r_1, r_2 stupně $\leq m$ takové, že

$$y(x) = x^k \exp(\alpha x)[r_1(x) \cos \beta x + r_2(x) \sin \beta x]$$

je řešení (15).

Příklad. $y'' + y' - y = \cos x$. Typ (15), $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, tj. $m = 0$, číslo $\lambda = i$ není kořen char. polynomu.
Hledám řešení ve tvaru $y(x) = A \cos x + B \sin x$, dosazením do rovnice vyjde $A = -2/5$, $B = 1/5$.

Poznámka. Příklad ukazuje, že Větu 12.9.' nelze zjednodušit v tom smyslu, že pokud pravá strana obsahuje jenom cos, pak najdu řešení, obsahující také jenom cos.

Poznámka. Soustavu n-rovnic lineárních rovnic 1. řádu $X' = AX$, kde $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ jsou neznámé funkce, matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ lze řešit převedením na jednu (či vícero) rovnic vyššího řádu.
Postup: z první rovnice $x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots$ vyjádříme např. $x_2 = L(x_1', x_1, x_3, \dots x_n)$, kde $L(\dots)$ je nějaká lineární kombinace. Derivováním dostaneme $x_2' = L(x_1'', x_1', x_3', \dots x_n')$, Dosazením do zbylých $n - 1$ rovnic obdržíme soustavu, která neobsahuje x_2, je však řádu 2 (obsahuje x_1''). Analogicky vylučujeme další funkce x_i. (Fakticky jde o inverzní d'Alembertovu transformaci).

Příklad. Soustava (pro neznámé funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$):

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= -6x + y \end{aligned}$$

Z první rovnice: $y = 2x - x'$, $y' = 2x' - x''$, dosazením do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 2x' - x'' &= 2x - (2x - x') \\ x'' - 3x' - 4x &= 0 \\ \text{charakteristický polynom:} \quad & p(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \\ \text{obecné řešení:} \quad & x(t) = K \exp(4t) + L \exp(-t) \end{aligned}$$

a protože $y = 2x - x'$, je $y(t) = -2K \exp(4t) + 2L \exp(-t)$.

13. Metrické prostory

Definice. Metrickým prostorem rozumíme dvojici (X, ϱ), kde X je množina a funkce $\varrho : X \times X \to [0, +\infty)$ je tzv. metrika, splňující (pro všechna x, y, $z \in X$):
(i) $\varrho(x, y) \geq 0$, přičemž $\varrho(x, y) = 0$ právě když $x = y$
(ii) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (symetrie)
(iii) $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Poznámky. Metrický prostor (dále m.p.) je obecná matematická struktura, v níž je možné měřit vzdálenost. Díky metrice zavedeme okolí, a tudíž i všechny základní pojmy analýzy (limita, konvergence, spojitost) ve zcela obecné situaci.

Příklady. ① $\mathbb{R}$ s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$
② na libovolné množině P lze zavést ,,diskrétní metriku" jako

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{R}$), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)

Definice. Normovaný vektorový prostor je dvojice $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor, a norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\triangle$-nerovnost)

Příklady. ① Na $\mathbb{R}^n$ lze zavést různé normy: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, nejčastější je Eukleidovská norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}\,, \qquad \text{kde } \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

② Na prostoru $C([a, b])$ – spojité funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – se obvykle používá ,,supremová" norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a, b]\}\,.$$

Jiná norma na témže prostoru je tzv. L^1 norma:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Důležitý příklad. Normovaný prostor je metrický prostor, kde metriku definujeme jako $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Definice. (X, ϱ) je m.p., $x \in X$, $\delta > 0$. Definujeme kruhové okolí

$$U(x, \delta) = \{y \in X;\ \varrho(x, y) < \delta\}$$

a prstencové okolí

$$P(x, \delta) = \{y \in X;\ 0 < \varrho(x, y) < \delta\} = U(x, \delta) \setminus \{x\}\,.$$

Množina $A \subset X$ se nazve otevřená, jestliže

$$\big(\forall x \in A\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[U(x,\delta) \subset A\big].$$

Množina $A \subset X$ se nazve uzavřená, jestliže její doplněk $A^c = X \setminus A$ je otevřená množina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ s obvyklou metrikou $\varrho(x,y) = |x-y|$: (a,b) je otevřená, $[a,b]$ uzavřená. Množina $[0,1)$ není ani otevřená, ani uzavřená. Prázdná množina je zároveň otevřená i zavřená.

Věta 13.1 [vlastnosti otevřených množin] (X,ϱ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou otevřené množiny
(2) G_α otevřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} G_\alpha$ je otevřená
(3) $G_1, \ldots, G_N$ jsou otevřené $\quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{N} G_n$ je otevřená

Poznámka. konečný počet množin v bodě (3) je podstatný: množiny $(-1/n, 1/n)$ jsou otevřené, jejich průnik přes $n \in \mathbb{N}$ je však jednobodová množina $\{0\}$, která není otevřená.

Věta 13.1' [vlastnosti uzavřených množin] (X,ϱ) je m.p. Potom
(1) X, $\emptyset$ jsou uzavřené množiny
(2) F_α uzavřené pro $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ je uzavřená
(3) $F_1, \ldots, F_N$ jsou uzavřené $\quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{N} F_n$ je uzavřená

Definice. (X,ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{x_n\}$ má limitu $x_0 \in X$ (neboli konverguje k x_0), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[n \geq n_0 \implies x_n \in U(x_0,\varepsilon)\big].$$

Značíme: $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, nebo $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Ekvivalentní je požadovat, aby posloupnost (reálných čísel) $\varrho(x_n, x_0)$ měla limitu 0.

Věta 13.2 [Charakterizace uzavřených množin pomocí posloupností.] (X,ϱ) je m.p., $F \subset X$. Potom je ekvivalentní:
(1) F je uzavřená
(2) Jsou-li $x_n \in F$ libovolné body, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, pak nutně též $x_0 \in F$.
Názorně: z uzavřené množiny nelze vykonvergovat ven.

Definice. (X,ϱ) je m.p. Uzávěr množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\overline{A} = \big\{y \in X;\ (\forall \delta > 0)\ U(y,\delta) \cap A \neq \emptyset\big\}.$$

Příklady. ① $\overline{(0,1)} = [0,1]$ ② $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Věta 13.3 [Vlastnosti uzávěru.] (X,ϱ) je m.p., A, $B \subset X$. Potom
(1) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}, \quad \overline{\emptyset} = \emptyset$
(2) $\overline{A}$ je uzavřená množina
(3) $A \subset \overline{A}$, přičemž $A = \overline{A}$, právě když A je uzavřená
(*4) $y \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A,\ x_n \to y$ pro $n \to \infty$

Definice. (X, ϱ) je m.p. Hranici množiny $A \subset X$ definujeme jako

$$\partial A = \left\{y \in X;\ (\forall \delta > 0)\ U(y, \delta) \cap A \neq \emptyset \text{ a zároveň } U(y, \delta) \cap A^c \neq \emptyset\right\}.$$

Věta 13.4 [Vlastnosti hranice.]
(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}, \quad \partial A = \partial(A^c)$
(2) ∂A je uzavřená, $\quad \overline{A} = A \cup \partial A$
(3) A je uzavřená $\iff \partial A \subset A, \quad A$ je otevřená $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

Poznámka. Definujeme další pojmy: vnitřek A

$$\operatorname{int} A = \left\{y \in X;\ (\exists \delta > 0)\ U(y, \delta) \subset A\right\},$$

vnějšek A

$$\operatorname{ext} A = \left\{y \in X;\ (\exists \delta > 0)\ U(y, \delta) \cap A = \emptyset\right\}.$$

Platí:
• $\operatorname{int} A \subset A$, přičemž rovnost nastává právě když A je otevřená;
• $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (disjunktně)
• $X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A$ (disjunktně)

Definice. (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p. Funkce $f : X \to Y$ se nazve spojitá, jestliže

$$\big(\forall x_0 \in X\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big].$$

Připomenutí. Pro funkci $f : X \to Y$ definujeme vzor množiny $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in X;\ f(x) \in B\right\};$$

– je to obecně něco jiného než inverzní funkce (kterou značíme f_{-1} a která je definována pouze tehdy, je-li f prostá).

Věta 13.5 (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každou $G \subset Y$ otevřenou je $f^{-1}(G) \subset X$ otevřená
(3) pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F) \subset X$ uzavřená

Věta 13.6 [Heineho charakterizace spojitosti.] (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) f je spojitá
(2) pro každý bod $x_0 \in X$ a pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$ pro $n \to \infty$

Poznámky. Platí následující tvrzení (důkazy neprovádíme, neboť jsou velmi podobné situaci v $\mathbb{R}$, viz kapitoly 2 resp. 7 zimního semestru).
• Nechť (X, ϱ), (Y, σ), (Z, τ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ jsou spojité. Potom $g \circ f : X \to Z$ je spojité.

• Je-li (X, ϱ) m.p., $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ spojité funkce, potom i $f+g$, $f-g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ jsou spojité. (Místo $\mathbb{R}$ může být i lineární normovaný prostor.)
Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in X$, je také $f/g : X \to \mathbb{R}$ spojitá.

Definice. (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ funkce. Řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(b, \varepsilon)\big] .$$

Značíme $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, nebo $f(x) \to b$ pro $x \to x_0$.
Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in X$, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big[x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)\big] .$$

Poznámky. Vidíme, že hodnota $f(x_0)$ nehraje v definici žádnou roli, fakticky zde f nemusí být ani definována. Platí opět věty analogické situaci v $\mathbb{R}$:
• Heineho charakterizace limity: nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., $f : X \to Y$ daná funkce, $x_0 \in X$, $b \in Y$. Potom je ekvivalentní:
(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$
(2) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, splňující $x_n \to x_0$ pro $n \to \infty$, a zároveň $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$, platí $f(x_n) \to b$ pro $n \to \infty$.
• $f : X \to Y$ je spojitá, právě když je spojitá v každém bodě $x_0 \in X$
• $f : X \to Y$ je spojitá v bodě x_0, právě když $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\} \subset X$ posloupnost bodů. Řekneme, že $\{y_n\}$ je podposloupnost (též vybraná posloupnost), jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $y_n = x_{k_n}$ pro $\forall n$.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve kompaktní, jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ a bod $x_0 \in A$ tak, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$.

Poznámky. (X, ϱ) je m.p., $\{x_n\}$ posloupnost bodů. Potom:
• x_0 se nazve hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, jestliže existuje podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ taková, že $x_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$
• ekvivalentně: x_0 je hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \quad \text{platí pro někonečně indexů } n\ \big] .$$

• ekvivalentní definice limity: $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, právě když

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[x_n \in U(x_0, \varepsilon) \quad \text{platí pro všechna } n \text{ až na konečně výjimek}\big] .$$

• jestliže $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, pak x_0 je hromadný bod této posloupnosti, a je to jediný její hromadný bod.
• ekvivalentní definice kompaktnosti: A je kompaktní, právě když libovolná posloupnost $\{x_n\} \subset A$ má v A hromadný bod

Definice. (X, ϱ) je m.p. Množina $A \subset X$ se nazve omezená, jestliže

$$\big(\exists x_0 \in X\big)\big(\exists K > 0\big)\big[A \subset U(x_0, K)\big]\,.$$

Věta 13.7 [Vlastnosti kompaktních množin.] Nechť (X, ϱ) je m.p. a $A \subset X$ je kompaktní. Potom
(1) A je omezená a uzavřená
(2) Je-li $B \subset A$, a B je uzavřená, pak B je též kompaktní.

Věta 13.8 [Vztah kompaktnosti a spojitosti.] Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou m.p., nechť X je kompaktní. Potom:
(1) Je-li $f : X \to Y$ spojité, potom $f(X)$ je kompaktní.
(2) Je-li $f : X \to \mathbb{R}$ spojité, potom f je v X omezená, a nabývá zde maxima a minima.

Připomenutí. Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ se nazývá omezená, jestliže

$$\big(\exists K > 0\big)\big(\forall x \in X\big)\big[|f(x)| \le K\big]\,,$$

což je totéž, jako že množina

$$f(X) = \big\{f(x);\ x \in X\big\}$$

je omezená.

Definice. Nechť (X, ϱ) je m.p., Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m,\, n \ge n_0 \implies \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon\ \big]\,.$$

Pozorování. Jestliže posloupnost $\{x_n\}$ má limitu, pak je cauchyovská.

Definice. Metrický prostor (X, ϱ) se nazve úplný, jestliže libovolná cauchyovská posloupnost bodů z X má zde také limitu.

Definice. Normovaný vektorový prostor, který je úplný vzhledem k metrice, určené jeho normou, se nazývá Banachův prostor.
Prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k metrice, určené normou, která je určena skalárním součinem, se nazývá Hilbertův prostor.

Definice. Nechť (X, ϱ), (Y, σ) jsou metrické prostory. Funkce $f : X \to Y$ se nazve lipschitzovská, jestliže existuje $L > 0$ tak, že

$$\sigma(f(x), f(y)) \le L\varrho(x, y) \qquad \forall x, y \in X\,.$$

Je zjevné, že lipschitzovská funkce je spojitá. Funkce, která lipschitzovská s konstantou $L < 1$, se nazývá kontrakce.

Věta 13.9. [Banachova věta o pevném bodě.] Nechť X je úplný metrický prostor, nechť $f : X \to X$ je kontrakce. Potom existuje jediné $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Poznámka. Zbytek kapitoly je věnován speciálně situaci v $\mathbb{R}^N$. To, jak známo, je normovaný vektorový prostor, s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

kde x_i jsou jednotlivé složky vektoru x. Speciálně, $\mathbb{R}^N$ považujeme též za metrický prostor s metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Opakování. Prostor se skalárním součinem je dvojice $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, kde X je vektorový prostor, a skalární součin je přiřazení x, $y \mapsto \langle x, y\rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$, a $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = 0$.

Na prostoru se skalárním součinem lze definovat normu předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\,. \tag{16}$$

Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$ je vytvořena pomocí skalárního součinu

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Fakt, že toto (16) je vždy norma zejména, že splňuje trojúhelníkovou nerovnost), plyne z obecně platící tzv. Cauchy-Schwarzovy nerovnosti:

*** Cauchy-Schwarzova nerovnost.** Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem, a normu $\|\cdot\|$ definujeme pomocí (16). Potom

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

pro libovolné prvky x, $y \in X$.

Lemma 13.1. [O konvergenci v $\mathbb{R}^N$ po složkách.] Posloupnost bodů $x_n \in \mathbb{R}^N$ konverguje k $x_0 \in \mathbb{R}^N$, právě když každá složka vektoru x_n konverguje k odpovídající složce vektoru x_0.

Věta 13.10. [Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^N$.] Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Poznámka. Implikace kompaktní $\implies$ omezená a uzavřená platí obecně (viz Věta 13.7) výše. Obrácená implikace obecně neplatí; fakticky vzato platí pouze v konečnědimenzionálních prostorech (tj. v $\mathbb{R}^N$).

Věta 13.11. [Vztah $\mathbb{R}^N$ k úplnosti.] Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

Poznámka. Analogické vlastnosti (Lemma 13.1, Věta 13.10 a 13.11) má také množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, kterou přirozeně ztotožňujeme s $\mathbb{R}^2$.

14. Funkce více proměnných

V této kapitole studujeme funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, které lze chápat také jako M-tice funkcí

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_M)$$

kde každá f_j má N proměnných:

$$f_j = f_j(x_1, \ldots, x_N)\,.$$

Vektory značíme tučně $\boldsymbol{x}$, jejich složky x_i. V $\mathbb{R}^N$ uvažujeme implicitně eukleidovskou normu

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}\,,$$

a tudíž je to metrický prostor s metrikou $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Z předchozí kapitoly víme, co znamená okolí v $\mathbb{R}^N$, a tedy limita, spojitost takových funkcí. Dále se zaměříme především na jejich diferencovatelnost.

Příklady. ① Každá lineární funkce $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojitá, ztotožňujeme ji přirozeně s maticí $M \times N$
② Každý polynom $p(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce

Definice. Je dána $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Parciální derivací f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle x_i rozumíme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})\big]\,,$$

kde $\boldsymbol{e}^i$ je i-tý bázový vektor. Obecněji, definujeme derivaci ve směru $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ jako

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})\big]\,.$$

Poznámky. • parciální derivace: derivujeme podle jedné proměnné, ostatní proměnné jsou konstanty – v podstatě situace minulého semestru
• parciální derivace je speciální případ derivace ve směru: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}^i}$

Definice. Gradientem funkce $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ rozumíme matici $M \times N$

$$\nabla \boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{j=1,\ldots M;\ i=1,\ldots N}.$$

Poznámka. Parciální derivace je nedostatečný pojem: existuje funkce, jež má parciální derivace nulové, a přesto je (v daném bodě) nespojitá. Existuje dokonce funkce, která má všechny směrové derivace nulové, a pořád je nespojitá. Potřebujeme lepší (silnější) pojem derivace.

Definice. Je dána $\boldsymbol{f} : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Totálním diferenciálem funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ rozumíme lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\big[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - Lh\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

Značíme $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = L$. Ekvivalentní zápis:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + L\boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|), \qquad \boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}\,.$$

Poznámky. ① situace v $\mathbb{R}^1$: je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak $f'(a) = A \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|}\big[f(a+t) - f(a) - At\big] = 0\,.$$

② geometricky: afinní funkce $\boldsymbol{h} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + L\boldsymbol{h}$ parametrizuje tečnou nadrovinu grafu $\boldsymbol{f}$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}$.

Věta 14.1. [Od diferenciálu ke spojitosti a derivaci.] Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Potom
(1) $\boldsymbol{f}$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) pro každé $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N$ existuje směrová derivace $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ a rovná se $[d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})](\boldsymbol{v})$

Důsledek. Jestliže $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ existuje, je určen jednoznačně, a je reprezentován maticí $\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$, přesněji vzato zobrazením

$$\boldsymbol{h} \mapsto \nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}\,, \tag{17}$$

kde vektor $\boldsymbol{h}$ pro účely násobení maticí chápeme jako *sloupcový*.

Věta 14.2. [Od derivace ke spojitosti a diferenciálu.] Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom:
(1) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ omezené na nějakém $U(\boldsymbol{a}, \delta)$, je $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá
(2) Jsou-li $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i}$ spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, má zde $\boldsymbol{f}$ totální diferenciál

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená. Potom $\boldsymbol{f} \in C(\Omega)$ značí, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá (což je právě když všechny složky f_i jsou spojité, viz Lemma 13.1). Dále $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$ značí, že $\boldsymbol{f}$ a všechny její parciální derivace jsou spojité.
Proč nejraději funkce na otevřených množinách? Každý bod obsahuje i okolí – není problém s definicí parciální derivace atd.

Věta 14.3. [Diferenciál součtu a superpozice.]
(1) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mají totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom $f + g$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})\,.$$

(2) Nechť $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ mají totální diferenciál v bodech $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, respektive $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. Potom složené zobrazení $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$ má totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}$ a platí

$$d(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b})d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,.$$

Důsledek. Za předpokladu předchozí věty platí

$$\nabla(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

kde napravo máme maticový součin, zapsáno po složkách

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big(g_l(\boldsymbol{f})\big)(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

(tzv. „řetízkové pravidlo“).

Definice. Pro $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ definujeme otevřenou úsečku

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in (0,1)\big\}$$

a uzavřenou úsečku

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \big\{\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});\ t \in [0,1]\big\}.$$

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazve konvexní, jestliže $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \Omega$ implikuje $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \Omega$.

Věta 14.4. [O střední hodnotě v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená, konvexní, nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^1. Potom pro libovolné $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \Omega$ existuje $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \rangle.$$

Definice. Parciální derivace vyšších řádů definuji takto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

obecně

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}, \qquad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$$

vznikne postupnou aplikací $\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}$.

Funkce třídy C^k je taková, že všechny parciální derivace až do řádu k jsou spojité.

Poznámka. Závisí na pořadí parciálních derivací? Obecně ano: definujme

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & |y| > |x|, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, zatímco $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Je-li však funkce dost hladká, na pořadí nezáleží – viz následující věta.

Věta 14.5. [O záměnnosti parciálních derivací.] Nechť $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na nějakém $U(\boldsymbol{a})$. Potom

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{a}).$$

Důsledek. Je-li funkce třídy C^k, pak hodnoty libovolné parciální derivace stupně (nejvýše) k nezávisí na pořadí derivování.

Poznámka. Geometrický význam gradientu: je-li $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ třídy C^1, potom pro směrovou derivaci platí:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle \,.$$

To je nula, pokud $\boldsymbol{v} \perp \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (tj. $\boldsymbol{v}$ je směr „vrstevnice“), a nabývá maximální hodnoty (za podmínky $\|\boldsymbol{v}\| = 1$), pokud $\boldsymbol{v}$ je násobkem $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ (tj. $\boldsymbol{v}$ je směr „spádnice“). Přesněji řečeno, vektor ∇f ukazuje ve směru nejrychlejšího růstu funkce f.

Připomeň. Taylorův rozvoj funkce $g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má tvar

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \frac{1}{2!}g''(a)t^2 + R_3(h)\,,$$

kde $R_3(h) = \frac{1}{3!}g'''(\tau)h^3$ pro vhodné τ ležící mezi a a $a+h$.

Věta 14.6. [Taylorův rozvoj v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ je C^3, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$. Potom pro každé $\boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{a})$ existuje $\boldsymbol{\theta} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$ takové, že

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})h_i h_j + R_3(\boldsymbol{h})\,,$$

kde

$$R_3(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{\theta})h_i h_j h_k\,.$$

Definice. Multiindexem nazýváme n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$ nazýváme výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^N$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_N^{\alpha_N}\,.$$

Je-li $n = |\alpha|$, definuji zobecněné kombinační číslo

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1! \ldots \alpha_N!}\,;$$

– to vyjadřuje, kolika způsoby lze n prvků rozdělit do N skupin, jestliže j-tá skupina obsahuje právě α_j členů.

Příklady. Nechť $\alpha = (1, 0, 2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2}\,, \qquad x^\alpha = x_1 x_3^2\,.$$

Poznámky. Pomocí multiindexů můžeme elegantně zapisovat různé složité výrazy. Platí například multinomická věta (zobecnění binomické věty):

$$(h_1 + \dots h_N)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} h^\alpha\,, \quad \text{kde} \binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!}$$

Druhý člen Taylorova rozvoje lze napsat takto:

$$\frac{1}{2!} \sum_{|\alpha|=2} \binom{2}{\alpha} D^\alpha f(a) h^\alpha\,.$$

Zbytek můžeme napsat takto:

$$\frac{1}{3!} \sum_{|\alpha|=3} \binom{3}{\alpha} D^\alpha f(\theta) h^\alpha\,.$$

Obecný tvar (rozvoj m-tého řádu) vypadá takto:

$$f(a) = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{1}{n!} \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} D^\alpha f(a) h^\alpha \right) + R_{m+1}(h)\,,$$

kde

$$R_{m+1}(h) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m+1} \binom{m+1}{\alpha} D^\alpha f(\theta) h^\alpha\,.$$

Definice. Hessovou maticí funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{x}$ rozumíme

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right)_{i,j=1,\dots,N}\,.$$

Je to čtvercová matice, která je díky Větě 14.5 symetrická (je-li f dost hladká).

Definice. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ vzhledem k množině $M \subset \mathbb{R}^N$

- globální maximum, pokud $(\forall \boldsymbol{x} \in M)\ [f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})]$
- lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0)\ (\forall \boldsymbol{x} \in M \cap U(\boldsymbol{a}, \delta))\ [f(\boldsymbol{a}) \geq f(\boldsymbol{x})]$
- ostré lokální maximum, pokud $(\exists \delta > 0)\ (\forall \boldsymbol{x} \in M \cap P(\boldsymbol{a}, \delta))\ [f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})]$

Analogicky se definuje minimum (globální minimum, ostré lokální minimum).

Věta 14.7. [Nutné podmínka lokálního extrému v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$ extrém vzhledem k nějakému $U(\boldsymbol{a}, \delta)$. Potom pro každé $i = 1, \dots, N$ platí: jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ existuje, je rovna nule.

Definice. Bod $\boldsymbol{a}$, ve kterém je $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ (tj. $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = 0$, pro každé $i = 1, \dots, N$), nazýváme *stacionární bod.*

Poznámka. Z Věty 14.7 vyplývá, že *vnitřní* bod M může být extrém, pouze je-li stacionární (případně, neexistuje-li zde některá z derivací.)

Opakování. Nechť $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ je symetrická matice. Kvadratickou formou, určenou touto maticí, rozumíme funkci $Q_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$Q_A(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} h_i h_j = \langle A\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}\rangle = \boldsymbol{h}^T A \boldsymbol{h}\,.$$

Forma Q_A se nazve pozitivně definitní, jestliže existuje $c_1 > 0$ tak, že $Q_A(\boldsymbol{h}) \geq c_1 \|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna kladná.
Forma se nazve negativně definitní, jestliže existuje $c_2 > 0$ tak, že $Q_A(\boldsymbol{h}) \leq -c_2 \|\boldsymbol{h}\|^2$ pro každé $\boldsymbol{h}$. To nastává právě tehdy, když vlastní čísla A jsou všechna záporná.
Forma se nazve indefinitní, jestliže existují $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ tak, že $Q_A(\boldsymbol{v}) > 0$ a $Q_A(\boldsymbol{w}) < 0$. To nastává právě tehdy, když A má kladná i záporná vlastní čísla.

Opakování. Z lineární algebry víme, že symetrická matice má pouze reálná vlastní čísla, dále že odpovídající vlastní vektory tvoří ortogonální bázi, a tudíž matice je podobná diagonální matici.
K určení definitnosti matice není vždy nutné počítat vlastní čísla. Jestliže $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ je seznam všech vlastních čísel (vícenásobná píšeme opakovaně), pak platí:

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \\ \operatorname{tr} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \end{aligned}$$

kde $\operatorname{tr} A$ je stopa matice, definovaná jakožto součet diagonálních prvků. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= \det A = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \operatorname{tr} A = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice plyne, že vlastní čísla jsou všechna nenulová, ze druhé pak, že aspoň jedno je kladné a aspoň jedno záporné, tedy matice je indefinitní.
K určení definitnosti lze použít také Sylvesterovo pravidlo. Označme Δ_k, $k = 1, \dots N$, hlavní minory A, tj. determinanty matic $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{k}$. Potom forma určená maticí A je pozitivně definitní, právě když $\Delta_k > 0$ pro každé k, a je negativně definitní, právě když $(-1)^{k-1}\Delta_k > 0$ pro každé k, neboli $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\dots$.

Věta 14.8. [Postačující podmínky lokálních extrémů v $\mathbb{R}^N$.] Nechť $f : U(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ je třídy C^3. Nechť $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$. Označme $Q(\boldsymbol{h})$ kvadratickou formu, určenou Hessovou maticí f v bodě $\boldsymbol{a}$, tj.

$$Q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \,.$$

Potom platí:

1. je-li $Q(\boldsymbol{h})$ pozitivně definitní, je $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum
2. je-li $Q(\boldsymbol{h})$ negativně definitní, je $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum
3. je-li $Q(\boldsymbol{h})$ indefinitní, $\boldsymbol{a}$ není lokální extrém

Terminologie: třetí případ předchozí věty nazýváme *sedlový bod.*

Poznámka. Předchozí věta nepokrývá všechny možné případy. Je-li příslušná forma pouze semidefinitní, obecně nelze nic říci. Srovnej případ v $\mathbb{R}$, kdy $f'(a) = f''(a) = 0$. Potom a může a nemusí být lokální extrém (uvaž $f = t^3$ resp. t^4 v bodě $a = 0$.)

Věta 14.9 [Vázané extrémy – 1 vazba.] Nechť f, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nechť $\boldsymbol{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N ;\ g(\boldsymbol{x}) = 0 \right\} .$$

Předpokládejme, že f a g jsou třídy C^1 na okolí $\boldsymbol{a}$, a že $\nabla g(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}$.
Potom nutnou podmínkou toho, že $\boldsymbol{a}$ je lokální extrém f vůči M, je existence $\lambda \in \mathbb{R}$ takového, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{a}) \,. \tag{18}$$

Poznámky. Číslo λ se nazývá Lagrangeův multiplikátor. Dle předchozí věty jsou z extrému podezřelé body, kde

1. f, g nejsou hladké
2. $\nabla g(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, což odpovídá situaci, kde množina Γ (obecně $(N-1)$-dimenzionální hladká plocha) může degenerovat
3. konečně body, kde platí (18), tj. gradienty f a g jsou lineárně závislé

Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená, právě když existuje $C > 0$ tak, že $|x_i| \leq C$ pro $i = 1, \ldots, N$ a každé $\boldsymbol{x} \in M$. Uzavřená množina má typicky tvar

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N ;\ g(\boldsymbol{x}) \leq c \right\}$$

kde g je spojitá funkce (jedná se o vzor uzavřené množiny $(-\infty, c]$, viz Věta 13.5); obecněji, jde-li o průnik takovýchto množin (viz Věta 13.1’).

Věta 14.10. [O existenci globálních extrémů.] (1) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $M \subset \mathbb{R}^N$ je omezená a uzavřená. Potom f má globální maximum a minimum.
(2) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to +\infty} f(\boldsymbol{x}) = \infty$. Potom f má globální minimum.
(3) Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} f(\boldsymbol{x}) = -\infty$. Potom f má globální maximum.

*** Věta 14.11.** [Vázané extrémy – obecná verze.] Nechť f, $g_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots k$, kde $k < N$. Nechť $\boldsymbol{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N;\ g_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \dots k \right\}.$$

Předpokládejme, že f a g_j jsou třídy C^1 na okolí $\boldsymbol{a}$, a že matice

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right\}$$

má maximální hodnost, tedy k.
Potom nutnou podmínkou toho, že $\boldsymbol{a}$ je lokální extrém f vůči Γ, je existence čísel $\lambda_j \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla g(\boldsymbol{a})\,. \tag{19}$$

Věta 14.12. [O implicitní funkci – 1. verze] Nechť $F(\boldsymbol{x}, y) : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$. Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

- $F(\boldsymbol{a}, b) = 0$
- F je C^1 na okolí $(\boldsymbol{a}, b)$.
- (klíčový předpoklad) $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$

Potom existují δ, $\Delta > 0$ a C^1 funkce

$$Y(\boldsymbol{x}) : U(\boldsymbol{a}, \delta) \to U(b, \Delta)$$

tak, že pro každé $(\boldsymbol{x}, y) \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(b, \Delta)$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = Y(\boldsymbol{x}).$$

Navíc, je-li F třídy C^k, je též Y třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Označíme-li

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ (\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{N+1};\ F(\boldsymbol{x}, y) = 0 \right\}, \\ \Omega &= U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(b, \Delta), \end{aligned}$$

říká nám věta, že

$$\Gamma \cap \Omega$$

je totožná s grafem jisté funkce $Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a je tedy (v okolí daného bodu) N-dimenzionální hladkou plochou.

*** Věta 14.13.** [O implicitní funkci – obecná verze.] Nechť $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$; podrobněji, jde o funkce

$$F_j(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M), \qquad j = 1, \ldots M.$$

Nechť $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{N+M}$, po složkách

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M).$$

Nechť platí:

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$,
- F_j jsou C^1 na okolí $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
- (klíčový předpoklad) matice

  $$\left\{ \frac{\partial F_j}{\partial y_i}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \right\}_{i,j=1,\ldots M}$$

  je regulární.

Potom existují δ, $\Delta > 0$ a C^1 funkce

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}) : U(\boldsymbol{a}, \delta) \to U(\boldsymbol{b}, \Delta)$$

(tedy funkce z $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$) tak, že pro každé $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U(\boldsymbol{a}, \delta) \times U(\boldsymbol{b}, \Delta)$ platí

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}).$$

Navíc, je-li $\boldsymbol{F}$ třídy C^k, je též $\boldsymbol{Y}$ třídy C^k (na příslušných okolích).

Poznámka. Věta opět říká, že množina

$$\Gamma = \big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N+M};\ F_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \big\}$$

je N-dimenzionální plocha, neboť je grafem funkce $\boldsymbol{Y} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (na jistém okolí bodu $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.
Názorně: v původně $N + M$-dimenzionálním prostoru nám M nezávislých podmínek (rovnice $F_j = 0$) určuje N-dimenzionální objekt. Nezávislost těchto rovnic je zaručena třetím, klíčovým předpokladem.

*** Věta 14.14.** [O inverzní funkci.] Je dána funkce $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, podrobněji jde o funkce

$$\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_N), \quad \text{kde} F_j = F_j(x_1, \ldots, x_N).$$

Nechť $\boldsymbol{F}$ je C^1 na okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^N$, a nechť (klíčový předpoklad) matice

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right\}_{i,j=1,\dots N}$$

je regulární.
Potom existuje U okolí bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že $\boldsymbol{F}|_U$ je prostá; dále $V = \boldsymbol{F}(U)$ je otevřená množina, obsahující bod $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$, a funkce $\boldsymbol{F_{-1}} : V \to U$ je třídy C^1. Navíc platí

$$\nabla\big(\boldsymbol{F_{-1}}\big)(\boldsymbol{y}) = \Big(\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F_{-1}}(\boldsymbol{y}))\Big)^{-1}$$

Dodatek: je-li $\boldsymbol{F}$ třídy C^k, je též $\boldsymbol{F_{-1}}$ třídy C^k.