10. Řady

Věta 10.1. $\sum a_k$ konv. $\Rightarrow a_k \to 0, k \to \infty$.

Dk.: víme: $s_n \longrightarrow s \in \mathbb{R}, n \to \infty$,

kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

zřejmě též $s_{n-1} \longrightarrow s, n \to \infty$.

a tedy: $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$

(dle VoAL.)

Lemma 10.1. Nechť $a_k = b_k$ až na konečně výjimek. Pak $\sum a_k$ konv.

$\Leftrightarrow \sum b_k$ konv.

Dk. $\exists n_0$ t.ž. $a_k = b_k, \forall k \geq n_0$.

označ: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

$\Rightarrow$ pro $\forall n \geq n_0$ plyne:

$$s_n - t_n = \sum_{k=1}^{n_0-1} (a_k - b_k) = C$$

nezávisí na n

$$\Rightarrow \quad s_n = t_n + C, \quad \forall n \geq n_0$$

a tedy $\quad s_n \to s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t_n \to t \in \mathbb{R}$

($\sum a_k$ konv.) $\qquad$ ($\sum b_k$ konv.)

<u>Věta 10.2</u> [Aritmetika řad.]

Nechť $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergují. Pak $\sum \alpha a_k$, $\sum (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergují a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Dk. (jen 2. část) ... L.S. ř.č.s.:

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\to \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

(dle VoAL).

Lemma 10.2. Nechť $a_k \geq 0$. Pak $\sum a_k$ konv. právě když má omezené částečné součty.

Dk.: pozoruji: $\{s_n\}$ neklesající (neboť $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0}$)

Věta 7.2. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}^*$

navíc: $s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{s_n\}$ (shora) omezená

$s = +\infty \Leftrightarrow$ _"_ neomezená

Věta 10.3. [Srovnávací – nelimitní.]

Nechť $a_k, b_k \geq 0$, nechť $\exists C > 0$ t.ž. $a_k \leq C \cdot b_k$, pro $\forall k \geq n_0$. Pak:

1. $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.
2. $\sum a_k$ diver. $\Rightarrow \sum b_k$ diver.

Dk.: BÚNO: $a_k \leq C \cdot b_k$, $\forall k \geq 1$.
(L.10.1)

označme: $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

$\Rightarrow 0 \leq s_n \leq C \cdot t_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

a užij L.10.2.:

1. $\sum b_k$ konv. $\Rightarrow \{t_n\}$ omezená
$\Rightarrow \{s_n\}$ omezená
$\Rightarrow \sum a_k$ konv.

2. ... analogicky

Věta 10.4. [Podílové kritérium]

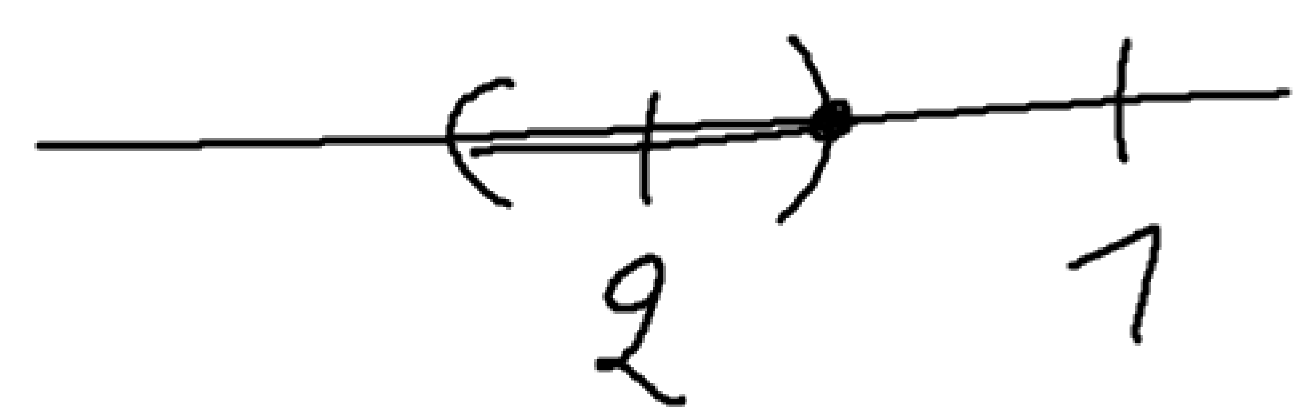
nechť $a_k > 0$, nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q$, $k \to \infty$.

Potom: 1. $q < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.

2. $q > 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.

Dk. 1. nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to q < 1$

vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $\theta := q + \varepsilon < 1$

(L.2.1. nebo obrázek: 

)

$\Rightarrow \exists n_0$ t.ž. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \in U(q, \varepsilon)$

pro $\forall k \geq n_0$, speciálně: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \theta$

BÚNO (L.10.1): platí $\boxed{\begin{array}{c} a_{k+1} \leq \theta \cdot a_k \\ \text{pro } \forall k \geq 1 \end{array}}$

odtud snadno (indukcí):

$$a_k \le \theta a_{k-1} \le \theta^2 a_{k-2} \le \dots \le \theta^{k-1} a_1$$

tj. $a_k \le C \cdot \theta^k, \ \forall k \ge 1$

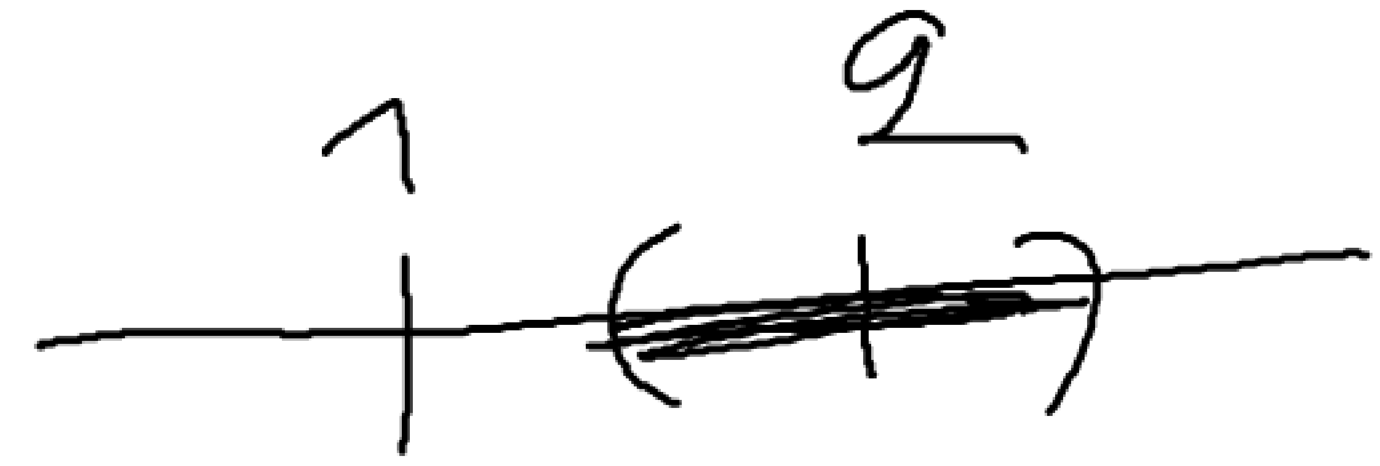
kde $C = a_1/\theta > 0$.

$\theta \in (0,1) \Rightarrow \sum \theta^k$ konv., a tedy

V.10.3. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

---

2. $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to q > 1$



$\Rightarrow \exists n_0$ t.ž. $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} > 1, \ \forall k \ge n_0$

$$a_{k+1} > a_k$$

odtud plyne: $a_k > a_{n_0} \ \forall k \ge n_0$

a tedy $a_k \not\to 0, \ k \to \infty$.

Věta 10.1. $\Rightarrow \sum a_k$ div.

Věta 10.5. [Odmocninové kritérium]

Nechť $a_k > 0$, nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q$, $k \to \infty$.

Potom: 1. $q < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.

2. $q > 1 \Rightarrow \sum a_k$ diver.

Dk. 1. vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $\theta = q + \varepsilon < 1$

$\exists n_0$ t.ž. $\sqrt[k]{a_k} \in \mathcal{U}(q, \varepsilon)$

tedy $\sqrt[k]{a_k} < q + \varepsilon = \theta$

pro $\forall k \geq n_0$.

BÚNO: $\sqrt[k]{a_k} < \theta \quad \forall k \geq 1$

(L. 10.1)

$a_k < \theta^k$

víme: $\sum \theta^k$ konv., a tedy

$\sum a_k$ konv. (Věta 10.3.)

2. nechť $\sqrt[k]{a_k} \to q > 1$

$\Rightarrow \exists\, n_0$ t.ž. $\sqrt[k]{a_k} > 1$, $k \geq n_0$

$a_k > 1$, $k \geq n_0$

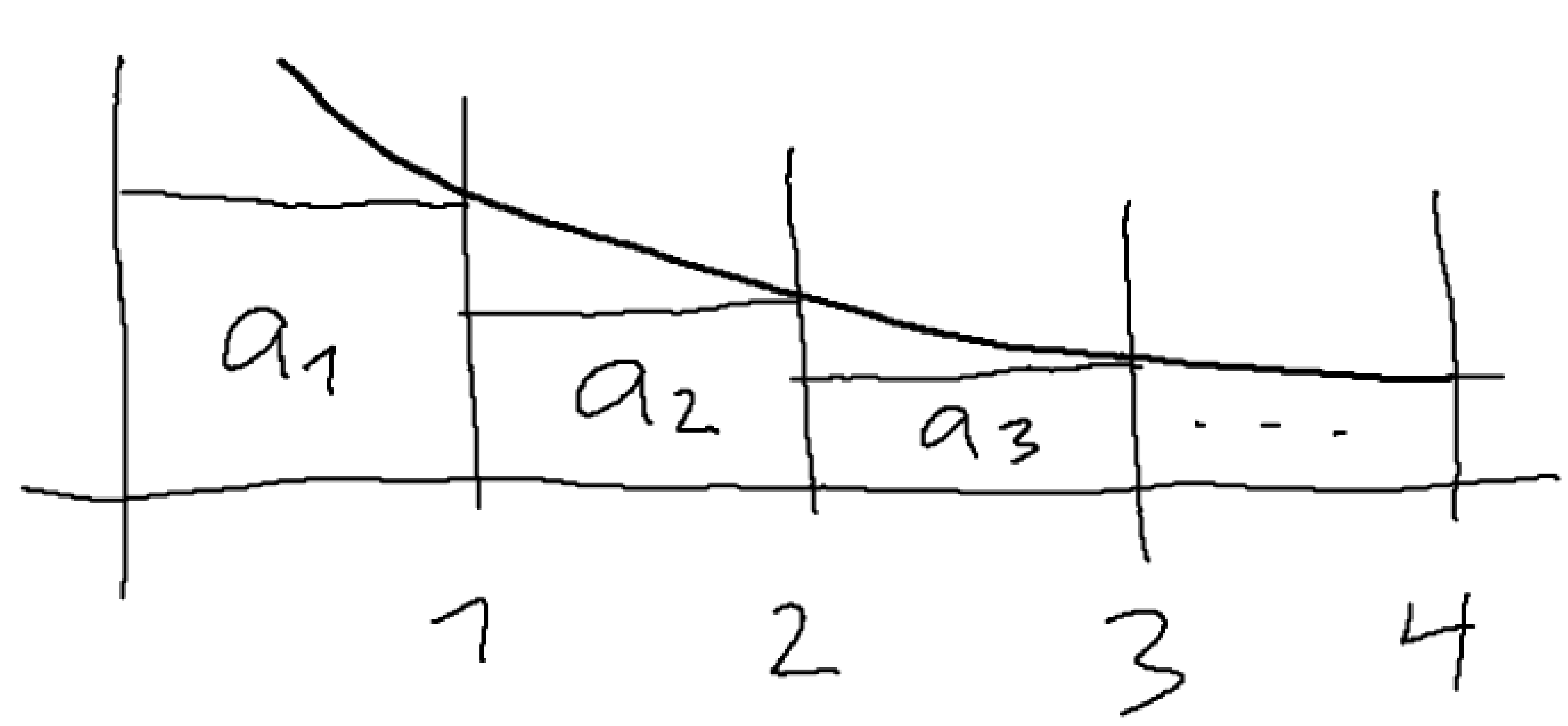
tedy určitě $a_k \not\to 0$, $k \to \infty$

Věta 10.1. $\Rightarrow \sum a_k$ diver.

Věta 10.6. [Integrální kritérium]

Nechť $\exists$ funkce $f(x)$, jež je spojité, nezáporné a neklesající v $[1, +\infty)$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, právě když: $(N)\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

Dk.



víme: částečné součty $s_n \to s \in [0, +\infty]$

(s_n neklesající)

podobně: $\exists F(x)$ z.-f. ($\Leftarrow$ spojitost $f(x)$, Věta 9.6)

$$(N)\int_1^n f(x)\,dx = F(n) - F(1) \to F(+\infty-) - F(1)$$

$$= (N)\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = I \in [0, +\infty].$$

$x \in [k, k+1]$: $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Big/ \quad a_k \geq \int_k^{k+1} f \geq a_{k+1}$$

$$s_{n-1} \geq \int_1^n f \geq s_n - a_1$$

$n \to \infty$:

$$s \geq I \geq s - a_1$$

a tedy: $s < +\infty \iff I < +\infty$

Věta 10.7. [Srovnávací – limitní]

nechť $a_k, b_k > 0$, nechť $a_k \sim b_k$.

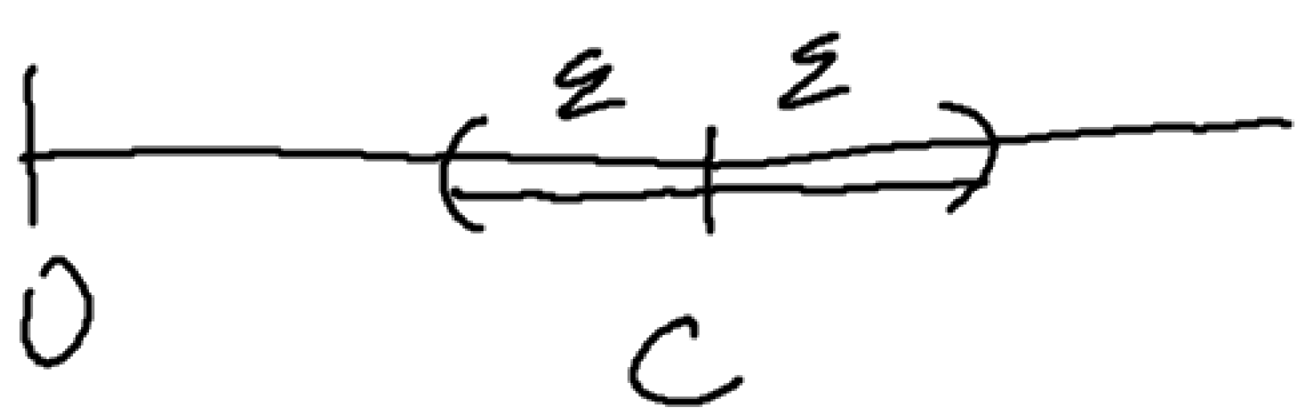
Pak $\sum a_k$ konv. $\iff \sum b_k$ konv.

- - - - - - - -

Dk. máme: $\frac{a_k}{b_k} \to c \neq 0$, musí $c > 0$

(neboť $\frac{a_k}{b_k} > 0$)

vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $0 \notin \mathcal{U}(c, \varepsilon)$, tj.



$0 < c - \varepsilon$

.... $\exists n_0$ t.ž. $\frac{a_k}{b_k} \in \mathcal{U}(c, \varepsilon)$, $k \geq n_0$

$$c - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < c + \varepsilon$$

$$\boxed{c_1 \cdot b_k < a_k < c_2 \cdot b_k}$$

kde $c_{1,2} = c \pm \varepsilon > 0$

... Věta 10.3 $\Rightarrow$ hotovo
(2×)

Věta 10.8. [Raabeho kritérium.]

nechť $a_k > 0$, nechť $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to p$.

Potom: 1. $p > 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv.

2. $p < 1 \Rightarrow \sum a_k$ diver.

Dk.: 1. nechť $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to p > 1$

vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $\eta := p - \varepsilon > 1$

... $\exists n_0$ t.ž. $\boxed{k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > \eta}$, $\forall k \geq n_0$

BÚNO: platí pro $\forall k \geq 1$

$$k(a_k - a_{k+1}) > \eta \cdot a_{k+1} \quad \Big| - a_{k+1}$$

$$k a_k - (k+1) a_{k+1} > (\eta - 1) a_{k+1} \quad \Big| \sum_{k=1}^{n-1}$$

LS: teleskopická suma!

$$1 \cdot a_1 - \cancel{2a_2} + \cancel{2a_2} - \cancel{3a_3} + \dots + \cancel{(n-1)a_{n-1}} - n a_n$$

$$= a_1 - n a_n < a_1$$

PS: $(\eta - 1) \cdot (a_2 + \dots + a_n) = s_n - a_1$

<u>CELKEM</u>: $a_1 > (\eta - 1)(s_n - a_1)$

$a_1 > (\eta-1)\cdot s_n - (\eta - 1) a_1$

$\Rightarrow s_n < \frac{\eta \cdot a_1}{\eta - 1}$

tj. $\{s_n\}$ omezené shora;

L. 10.2. $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

<u>2.</u> vol $\varepsilon > 0$ t.ž. $\eta := p + \varepsilon < 1$

$\exists n_0 \, \forall k \geq n_0$: $\boxed{k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) < \eta}$

... BÚNO: platí $\forall k \geq 1$

$k a_k - (k+1) a_{k+1} < (\eta - 1) a_k < 0 \quad \Big| \sum_{k=1}^{n-1}$

$\boxed{a_1 - n a_n < 0}$

$a_n > a_1 \cdot \frac{1}{n}$

leč: $\sum \frac{1}{n}$ diver, a tedy $\sum a_n$ diver.

(Věta 10.3)