<u>Věta 11.1</u>. Je dána řada $\sum c_n (z-z_0)^n$.
Pak $\exists R \in [0, +\infty]$ takové, že:

(i) je-li $|z-z_0| < R$, řada konv. abs.

(ii) je-li $|z-z_0| > R$, řada diverguje.

---

<u>Dk</u>. $\mathcal{K} = \{ \rho \geq 0, \ \{|c_n| \rho^n\} \text{ omezená} \}$

vidíme: $\mathcal{K} \subset [0, +\infty)$, neprázdná
$(0 \in \mathcal{K})$

polož $R = \sup \mathcal{K}$

<u>ad (i)</u>: nechť $z \in \mathbb{C}$, $|z-z_0| < R$

2. vlastnost suprema: $\exists \rho > |z-z_0|$
t.ž. $\rho \in \mathcal{K}$

tj. $\exists C$ t.ž.: $|c_n| \rho^n \leq C, \forall n$

<u>ukážeme</u>: $\sum c_n (z-z_0)^n$ konv. absolutně:

$$|c_n (z-z_0)|^n = |c_n| |z-z_0|^n$$

$$= |c_k| \rho^k \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^k \leq C \cdot \theta^k$$

kde $\theta = \dfrac{|z-z_0|}{\rho} < 1$

$\Rightarrow \sum \theta^k$ konv., a užiji Větu 10.3.

---

ad (iii): nechť $z \in \mathbb{C}$, $|z-z_0| > R$

$\Rightarrow |z-z_0| \notin K$ (1. vlastnost suprema)

tj.: $|c_k (z-z_0)^k| = |c_k| \cdot |z-z_0|^k$ není omezené

Věta 10.1. $\Rightarrow \sum c_k (z-z_0)^k$ diverguje

---

Věta 11.2. Je dána řada $\sum c_k (z-z_0)^k$.

Nechť $c_k \neq 0$, nechť $\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \to r$.

Pak $R = \frac{1}{r}$ (úmluva: $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$)

je poloměr konvergence.

**Dk.** označme $b_k = |c_k| \cdot |x - x_0|^k$

TRIK: užiji podílové kritérium (V.10.4.)

na řadu $\sum b_k$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{|c_{k+1}| \cdot |x - x_0|^{k+1}}{|c_k| \cdot |x - x_0|^k} = \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \cdot |x - x_0|$$

$$\to \varrho \cdot |x - x_0|$$

vidím: (i) $|x - x_0| < R = \frac{1}{\varrho}$

$|x - x_0| \cdot \varrho < 1 \Rightarrow \sum b_k$ konv.

tj. $\sum c_k (x - x_0)^k$

konv. abs.

(ii) $|x - x_0| > R = \frac{1}{\varrho}$

$|x - x_0| \cdot \varrho > 1 \Rightarrow b_k \not\to 0$

a tedy $\sum c_k (x - x_0)^k$

(V.10.1.) diverguje.

CELKEM: $R = \frac{1}{r}$ má vlastnosti (i), (ii) z Věty 11.1.

$\Rightarrow$ je to poloměr konvergence.

<u>Krajní případy:</u>

$r = 0 \Rightarrow \frac{b_{k+1}}{b_k} \to 0$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$

tj. $\sum c_k (z - z_0)^k$ konv. vždy

... $\boxed{R = +\infty}$

$r = +\infty \Rightarrow \frac{b_{k+1}}{b_k} \to +\infty$ pokud $z \neq z_0$

tj. $\sum c_k (z - z_0)^k$ konv.

jen pro $z = z_0$

... $\boxed{R = 0}$

Věta 11.3 Je dána řada $\sum c_k (x-x_0)^k$.
Nechť $\sqrt[k]{|c_k|} \to r$. Pak $R = \frac{1}{r}$
(s úmluvou $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$)
je poloměr konvergence.

Dk. označme $b_k = |c_k| \cdot |x-x_0|^k$.

TRIK: užiji odmocninové kr. (V. 10.5)

na řadu $\sum b_k$:

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{c_k}\,|x-x_0| \to r \cdot |x-x_0|$$

... a dále jako v předchozí větě.

---

Lemma 11.1 Řady $(\Pi_1)$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$
a $(\Pi_2)$ $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-x_0)^{k-1}$ mají stejný
poloměr konvergence.

Pozn: $(\Pi_2) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l (x-x_0)^l$, $d_l = (l+1) c_{l+1}$

Dk. nechť $R_1$ resp. $R_2$ je poloměr konvergence řady $(\Pi_1)$ resp. $(\Pi_2)$.

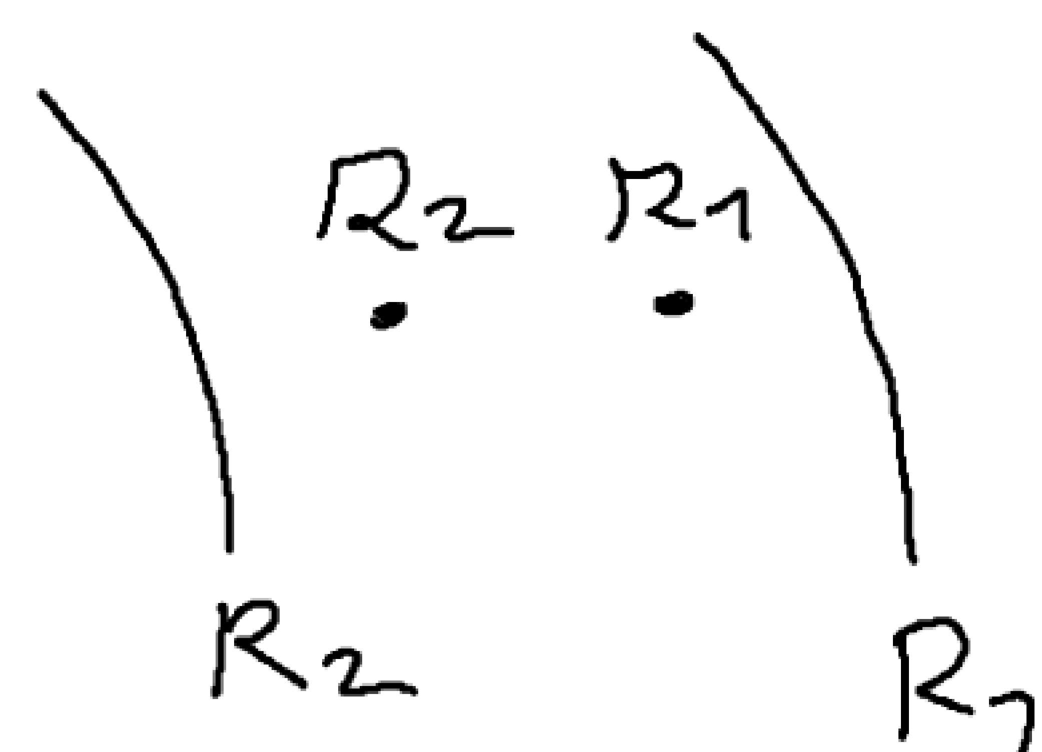
1. KROK: $|c_k (z-z_0)^k| = |c_k (z-z_0)^{k-1}| |z-z_0|$

$$\leq |k c_k (z-z_0)^{k-1}| \cdot |z-z_0| \quad \forall k \geq 1$$

a tedy $(\Pi_2)$ konv. abs. $\Rightarrow$ $(\Pi_1)$ konv. abs.,

tj. musí $R_2 \leq R_1$

2. KROK: ?? $R_2 < R_1$




$\exists\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ t.ž.

$$R_2 < |z_2 - z_0| < |z_1 - z_0| < R_2$$

ukážeme: $(\Pi_2)$ konv. abs. pro $z = z_2$

(SPOR – vlastnosti (ii) $R_2$)

víme: $(\Pi_1)$ konv. pro $z = z_1$, a tedy

navíc $|c_k (z_1 - z_0)^k| \leq K$, $\forall k \in \mathbb{N}$

píšeme: $\left| r\, c_r (R_2 - R_0)^{r-1} \right|$

$$= \left| c_r (R_1 - R_0)^r \right| \cdot r \left| \frac{R_2 - R_0}{R_1 - R_0} \right|^r \cdot \frac{1}{|R_2 - R_0|}$$

$$\le \frac{K}{|R_2 - R_0|} \cdot r\,\theta^r, \quad \text{kde } \theta = \frac{|R_2 - R_0|}{|R_1 - R_0|} < 1$$

avšak: $\sum r\,\theta^r$ konv. (např. dle Věty 10.4.)

$\Rightarrow$ $(\Pi_2)$ konv. abs. (Věta 10.3) (pro $R = R_2$)