Lemma 12.2 Je-li $p(\lambda)$ char. polynom operátoru $\mathcal{K}[y]$, pak pro $\forall l \geq 0$ celé

$$\mathcal{K}[x^l e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) x^{l-j}.$$

Dk. 1. $l=0$:

$$\mathcal{K}[e^{\lambda x}] = \sum_{r=0}^{n} b_r \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r} e^{\lambda x}}_{\lambda^{n-r} e^{\lambda x}} = e^{\lambda x} p(\lambda)$$

$$PS: \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} p^{(0)}(\lambda) x^0 = p(\lambda)$$

2. $l \geq 1$ obecné : TRIK : $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l$

$$LS: \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \mathcal{K}[e^{\lambda x}]$$

$$= \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^l \sum_{r=0}^{n} b_r \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r} e^{\lambda x}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} b_r \left(\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r} e^{\lambda x}$$

... záměna derivací ... (viz Kap. 14)

$$= \sum_{r=0}^{n} b_r \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r} \underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{l} e^{\lambda x}}_{x^l e^{\lambda x}}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} b_r \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-r} \left(x^l e^{\lambda x}\right) = K\left[x^l e^{\lambda x}\right].$$

PS: Leibnizovo pravidlo:

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{l} \left(a(\lambda)\, b(\lambda)\right) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} a^{(j)}(\lambda)\, b^{(l-j)}(\lambda)$$

... užiji pro $a(\lambda) = p(\lambda)$

$b(\lambda) = e^{\lambda x}$, ($x$ pevné)

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{l} \left(p(\lambda) e^{\lambda x}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} p^{(j)}(\lambda) \underbrace{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{l-j} e^{\lambda x}}_{x^{l-j} e^{\lambda x}}$$

Lemma 12.3 Nechť $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j=1,\dots,m$ jsou vzájemně různé, nechť $q_j(t)$ jsou polynomy. Jestliže $\sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\lambda_j x} \equiv 0$, pak $q_j(t) \equiv 0$, $\forall j$.

Dk. indukcí dle $m \in \mathbb{N}$

$m=1$: $\quad q_1(t) e^{\lambda_1 x} \equiv 0 \quad / \cdot e^{-\lambda_1 x}$

$$q_1(t) \equiv 0$$

$m \to m+1$: nechť $\sum_{j=1}^{m+1} q_j(t) e^{\lambda_j x} \equiv 0$

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\lambda_j x} + q_{m+1}(t) e^{\lambda_{m+1} x} \equiv 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_j(t) e^{\mu_j x} + q_{m+1}(t) \equiv 0$$

kde $\mu_j = \lambda_j - \lambda_{m+1} \neq 0$

<u>TRIK</u>: aplikuji $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$, $n > \mathrm{st}\, q_{m+1}$

<u>pozoruji</u>: $\frac{d}{dx}\left(q_j(x) e^{\mu_j x}\right)$

$= q_j'(x) e^{\mu_j x} + \mu_j q_j(x) e^{\mu_j x}$

$= \tilde{q}_j(x) e^{\mu_j x}$, kde $\mathrm{st}\, \tilde{q}_j = \mathrm{st}\, q_j$

… neboť $\mathrm{st}\, q_j' < \mathrm{st}\, q_j$

$\mathrm{st}\, \mu_j q_j = \mathrm{st}\, q_j$

$(\mu_j \neq 0)$.

<u>CELKEM tedy</u>:

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{q}_j(x) e^{\mu_j x} \equiv 0$$

Dle indukčního předpokladu:

$\tilde{q}_j(x) \equiv 0$, a tedy $q_j(x) \equiv 0$ $\forall j \leq m$.

Dle (*) výše též $q_{m+1}(x) \equiv 0$.

<u>Věta 12.8</u> Nechť λ_j, $j=1,\dots m$ jsou kořeny char. polynomu, nechť s_j jsou jejich násobnosti. Potom fce

$$(+)\; x^{l} e^{\lambda_j x}, \quad l=0,\dots,(s_j)-1, \quad j=1,\dots m$$

tvoří F.S. rovnice $\mathcal{K}[y]=0$.

<u>Dk.</u>: <u>1.</u> funkce (+) náleží $\mathcal{H}$:

... plyne z klíčového pozorování:

$$\boxed{\lambda \text{ kořen násobnosti } s,\ l<s \text{ celé} \Rightarrow \mathcal{K}[x^{l} e^{\lambda x}]=0.}$$

<u>dk.</u> dle Lemmatu 12.2:

$$\mathcal{K}[x^{l} e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \underbrace{p^{(j)}(\lambda)}_{=0} x^{l-j}$$

neboť $j \le l < s$

2. funkce (+) jsou LN:

... jejich lineární kombinace má tvar

$$\sum_{j=1}^{m} q_j(x) e^{\lambda_j x} ,$$ a je-li $\equiv 0$,

pak (L. 12.3) nutně $q_j(x) \equiv 0$,

tj. tato LK je triviální.

3. funkce (+) generují celé $\mathcal{H}$:

... neboť jejich počet je:

$$r_1 + r_2 + \cdots r_m = n = \dim \mathcal{H}$$

Věta 12.6

víme z algebry .... $n = st\, p(\lambda)$

(neboť $b_0 \neq 0$)

Věta 12.9. Úloha $K[y] = q(x)e^{\lambda_0 x}$, má (jediné) řešení tvaru $x^k r(x) e^{\lambda_0 x}$, kde $\operatorname{st} r = \operatorname{st} q$, $k \geq 0$ je násobnost λ_0 coby kořene $\chi(\lambda)$.

Dk. **1.** $K\left[x^{k+s} e^{\lambda_0 x}\right] = q_s(x) e^{\lambda_0 x}$,

kde $\operatorname{st} q_s = s$, $\forall s \geq 0$.

... dle Lemmatu 12.2 .... $(\lambda = \lambda_0, l = k+s)$

$$K\left[x^{k+s} e^{\lambda_0 x}\right] = e^{\lambda_0 x} \cdot q_s(x)$$

kde $$q_s(x) = \sum_{j=0}^{k+s} \binom{k+s}{j} \chi^{(j)}(\lambda_0) \cdot x^{k+s-j}$$

$j < k$: $\chi^{(j)}(\lambda_0) = 0$ ...(nic)

$j = k$: $\chi^{(j)}(\lambda_0) \neq 0$ .... x^s

$j > k$: .... $x^{\underbrace{s+(k-j)}_{<s}}$

2. $q(t)$ je (jednoznačně určené) lin. kombinace $q_s(t)$, $s=0,\dots m$

$$
\begin{aligned}
q_m(x) &= a_m x^m + \dots \\
q_{m-1}(t) &= \qquad a_{m-1} x^{m-1} + \dots \\
&\vdots \\
q_0(t) &= \qquad\qquad a_0 \\
\hline
q(t) &= c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \exists!\ \alpha_s$ $(s=0,\dots m)$ t. ž. $q(t) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s q_s(t)$

3. dle bodu 1, 2 a linearity $\mathcal{K}$:

$$
\underbrace{\sum_{s=0}^{m} \alpha_s \mathcal{K}\left[x^r x^s e^{\lambda_0 x}\right]}_{\mathcal{K}\left[x^r \underbrace{\sum_{s=0}^{m} \alpha_s x^s}_{\Omega(x)} e^{\lambda_0 x}\right]} = \underbrace{\sum_{s=0} \alpha_s q_s(t) e^{\lambda_0 x}}_{q(t) e^{\lambda_0 x}}
$$