Věta 13.4 Nechť (X, ρ) je m. z., $A \subset X$.

Potom: 1. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$

$\partial A = \partial(A^c)$

2. ∂A je uzavřené

$\overline{A} = A \cup \partial A$

3. A je uzavřené $\Longleftrightarrow$ $\partial A \subset A$

A je otevřené $\Longleftrightarrow$ $\partial A \cap A = \emptyset$

Dk. 1.

(i) uvážíme-li, že

$y \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \delta > 0: \ \mathcal{U}(y, \delta) \cap A \neq \emptyset$

$y \in \overline{A^c} \Leftrightarrow \forall \delta > 0: \ \mathcal{U}(y, \delta) \cap A^c \neq \emptyset$

plyne ihned, že $y \in \overline{A}$ & $y \in \overline{A^c}$

právě když $y \in \partial A$

(ii) díky bodu (i) je:

$$\partial(A^c) = \overline{A^c} \cap \overline{\underbrace{(A^c)^c}_{A}} = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \partial A$$

2. (i) dle Věty 13.3: $\overline{A}, \overline{A^c}$ uzavřené,

a tedy $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ je uzavřené
$\uparrow$ bod 1. (Věta 13.1', bod 2)

(ii) $\overline{A} \stackrel{?}{=} A \cup \partial A$

„$\supset$" $A \subset \overline{A}$ ... Věta 13.3, bod 3

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} \subset \overline{A}$ (bod 1.)

„$\subset$" chceme ukázat, že platí:

$y \in \overline{A} \Rightarrow y \in A \vee y \in \partial A$

tj. $y \in \overline{A} \ \& \ y \notin A \Rightarrow y \in \partial A$

neboli $\boxed{\overline{A} \cap A^c \subset \partial A}$

avšak (Věta 13.3, bod 1) $A^c \subset \overline{A^c}$

a tedy $\overline{A} \cap A^c \subset \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$

$\uparrow$

opět dle bodu 1.

3. (i) máme ekvivalence:

A je uzavřené

$$\overset{(\text{V.13.3})}{\iff} A = \overline{A}$$

$$\overset{(\text{bod } 2.)}{\iff} A = A \cup \partial A$$

$$\overset{(\text{zřejmě})}{\iff} \partial A \subset A$$

(ii) máme ekvivalence:

A je otevřené

$$\overset{(\text{Def.})}{\iff} A^c \text{ je uzavřené}$$

$$\overset{(\text{bod } 3.(i))}{\iff} \partial(A^c) \subset A^c$$

$$\overset{(\text{bod } 1.)}{\iff} \partial A \subset A^c$$

$$\overset{(\text{zřejmě})}{\iff} \partial A \cap A = \emptyset$$

Věta 13.5 [Charakterizace spojitosti]

Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., nechť $f: X \to Y$ je fce. Potom je ekvivalentní:

(1) f je spojitá

(2) pro $\forall G \subset Y$ otevř. je $f^{-1}(G) \subset X$ otevř.

(3) pro $\forall F \subset Y$ uzavř. je $f^{-1}(F) \subset X$ uzavř.

Dk. (1) $\Rightarrow$ (2) nechť $G \subset Y$ je otevřená

cíl: $f^{-1}(G)$ otevřené, tj:

$$\forall x_0 \in f^{-1}(G)\ \exists \delta > 0 : \mathcal{U}(x_0,\delta) \subset f^{-1}(G)$$

buď $x_0 \in f^{-1}(G)$ dáno ... $\exists y_0 \in G$ t.ž.

$$f(x_0) = y_0$$

víme: G otevřené, tj: $\exists \varepsilon > 0$ t.ž.

$$\mathcal{U}(y_0,\varepsilon) \subset G$$

nyní užiji spojitost f ...

$$\exists \delta > 0 \text{ t.ž. } x \in \mathcal{U}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$$

neboli $f(\mathcal{U}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}(y_0,\varepsilon) \subset G$

tj. $\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset f^{-1}(G)$.

$(2) \Rightarrow (1)$: $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ dáno ...

cíl: $\exists\, \delta > 0$: $f(\mathcal{U}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$

avšak: $\mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon) \subset Y$ je otevřené

tedy dle (2): $f^{-1}(\mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)) \subset X$

je otevřené.

zřejmě: $f(x_0) \in \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$,

a tedy: $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon))$

díky otevřenosti: $\exists\, \delta > 0$ t.ž.

$$\mathcal{U}(x_0,\delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon))$$

$$\Longleftrightarrow f(\mathcal{U}(x_0,\delta)) \subset \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon).$$

(2) $\Rightarrow$ (3) buď $F \subset Y$ uzavřené

cíl: $f^{-1}(F) \subset X$ je uzavřené

... stačí uvěřit, že platí (pro $\forall x \in X$):

$x \in (f^{-1}(F))^c \Leftrightarrow f(x) \notin F \Leftrightarrow f(x) \in F^c$

neboli $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$

avšak: $F^c \subset Y$ je otevřené

(neboť F je uzavřené)

tedy díky (2): $f^{-1}(F^c) \subset X$ otevřené

tedy: $(f^{-1}(F))^c$ je otevřené,

a konečně $f^{-1}(F)$ je uzavřené.

---

(3) $\Rightarrow$ (2) ... analogicky

Věta 13.6 [Heineho pro spojitost.]

Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou m. z., nechť $f: X \to Y$. Potom je ekvivalentní:

(1) f je spojité

(2) pro $\forall$ posl. $\{x_n\} \subset X$ a bod $x_0 \in X$ s.ř. $x_n \to x_0$ platí, že $f(x_n) \to f(x_0)$.

Dk. (1) $\Rightarrow$ (2) nechť $x_n \to x_0$ v X.

cíl: $f(x_n) \to f(x_0)$ v Y, tj:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

.... $\varepsilon > 0$ dáno : ze spojitosti f

$\exists \delta > 0 : x \in U(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)$

... leč: $x_n \to x_0$, a tedy:

$\exists n_0$ s.ř. $x_n \in U(x_0, \delta)$, $\forall n \geq n_0$

celkem tedy: $f(x_n) \in U(f(x_0), \varepsilon)$,

pro $\forall n \geq n_0$

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$: nechť neplatí (1), tj.

$\exists x_0 \in X \ \exists \varepsilon > 0$ t.ž. $\forall \delta > 0$

$$f(\mathcal{U}(x_0,\delta)) \not\subset \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$$

neboli $\exists x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)$ takové, že

$$f(x) \notin \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon)$$

fixuji $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, zbytek užívám

pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \exists x_n \in \mathcal{U}(x_0,\frac{1}{n})$ a zároveň

$$f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0),\varepsilon), \ \forall n$$

tedy zřejmě: $x_n \to x_0 \in X$

a přitom: $f(x_n) \not\to f(x_0) \in Y$,

neboli (2) neplatí!