Věta 13.7. Nechť (X,ρ) je m. p., nechť $A \subset X$ je kompaktní. Potom:

1. A je omezené, uzavřené

2. $B \subset A$ uzavřené $\Rightarrow$ B kompaktní

Dk. 1. ?? A není omezené:

$$\exists x_0 \in X \ \forall K > 0 : A \not\subset U(x_0, K)$$

tj. $\exists x \in A$ t. ž. $\rho(x, x_0) > K$

… fixuji $x_0 \in X$, zkusím užívám pro $K = n$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow \exists x_n \in A$ t. ž. $\rho(x_n, x_0) > n$

avšak: A kompaktní, a tedy

$\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$

$\exists x_1 \in A$ t. ž. $\tilde{x}_n \to x_1$

leč dle Δ-nerovnosti:

$$\underbrace{\rho(\tilde{x}_n, x_0)}_{\to +\infty} \leq \underbrace{\rho(\tilde{x}_n, x_1)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(x_1, x_0)}_{\text{pevné číslo}}$$

... <u>SPOR</u>

? A uzavřené:

... stačí ukázat (viz Věta 13.2), že:

$$\{x_n\} \subset A,\ x_n \to x_0 \Rightarrow x_0 \in A$$

... leč, opět díky kompaktnosti ...

$\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$ s.ž. $\tilde{x}_n \to x_1 \in A$

zároveň platí: $\tilde{x}_n \to x_0$

(podposloupnost nemění limitu)

a tedy $x_1 = x_0$

(jednoznačnost limity)

Věta 13.8. Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou m.p., $f: X \to Y$ je spojité.

1. $A \subset X$ kompaktní $\Rightarrow$ $f(A) \subset Y$ též kompaktní

2. $A \subset X$ kompaktní, neprázdné, navíc $(Y,\sigma) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, tak f má v A (globální) extrémy.

Dk. 1. nechť $\{y_n\} \subset f(A)$ dáno:

cíl: $\exists \{\tilde{y}_n\}$ podposl. t.ž. $\tilde{y}_n \to y_0 \in f(A)$

... leč: $y_n \in f(A) \Leftrightarrow y_n = f(x_n)$, kde $x_n \in A$

A kompaktní: $\exists$ podposl. $\{\tilde{x}_n\}$ t.ž. $\tilde{x}_n \to x_0 \in A$

zřejmě: $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n)$ je podposl. $\{y_n\}$

Heineho věta (V. 13.6)

$\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \to f(x_0) =: y_0 \in f(A)$.

---

2. $f : X \to \mathbb{R}$ spoj., $A \subset X$ kompaktní, neprázdné

cíl: $\exists x_0, x_1 \in A$ t.ž. $\forall x \in A$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

(BÚNO: pouze maximum)

... polož $M = f(A) = \{f(x), x \in A\}$

... platí: $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdné, kompaktní (bod 1.) shora omezené (V. 13.7)

Věta A.4 $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R},\ S = \sup M$

neboli: (i) $\forall x \in A : f(x) \leq S$

(ii) $\forall S' < S\ \exists x \in A : f(x) > S'$

stačí ukázat, že $\exists\, x_1 \in A$ s.ž.

$f(x_1) = S$ ... jsem hotov (viz bod (i))

... užívám bod (ii) pro $S' = S - \frac{1}{n}$,

$n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in A$ s.ž. $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$

zřejmě tedy $f(x_n) \to S$

zároveň BÚNO (kompaktnost A)

$x_n \to x_1 \in A$, leč opět dle

Heineho věty

$f(x_n) \to f(x_1)$, tedy $f(x_1) = S$.

<u>Věta 13.9.</u> [Banachova o pevném bodě.]

Nechť (X, ρ) je úplný m.p., $X \neq \emptyset$.

Nechť $f: X \to X$ je kontrakce.

Pak $\exists!\, x_0 \in X$ s.ž. $f(x_0) = x_0$.

Dk 1. jednoznačnost:

nechť: x_0, y_0 jsou pevné body f

cíl: $x_0 = y_0$

$$0 \le \rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \le \alpha \rho(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \cdot \underbrace{\rho(x_0, y_0)}_{\ge 0} \le 0$$

$$\Rightarrow \rho(x_0, y_0) = 0, \text{ tj. } x_0 = y_0$$

2. existence: buď $x_1 \in X$ libovolné

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ukážeme: (i) $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$

(ii) $f(x_0) = x_0$

ad (i) $\{x_n\}$ je cauchyovské

(⇒ jsem hotov: X úplný m.z.)

označme $c = \rho(x_2, x_1)$

řeč jiné: $\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1))$

$$\leq \alpha \rho(x_2, x_1) = \alpha C$$

$$\rho(x_4, x_3) = \rho(f(x_3), f(x_2))$$

$$\leq \alpha \rho(x_3, x_2) \leq \alpha^2 C$$

obecně (indukcí dle n):

$$\boxed{\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} \cdot C}$$

pro $\forall n \in \mathbb{N}$

buď nyní: $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$

(BÚNO $m > n$)

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \alpha^{n-1} \cdot C + \alpha^{n} \cdot C \cdots + \alpha^{m-2} C$$

$$= \underbrace{\alpha^{n-1} C}_{\leq \alpha^{n_0 - 1} C} \cdot \underbrace{\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \right)}_{\leq 1/1-\alpha}$$

CELKEM: $\boxed{\rho(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n_0 - 1} C}{1 - \alpha}}$

$\varepsilon > 0$ dáno. stačí volit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.ž.

$$\frac{\alpha^{n_0-1} C}{1-\alpha} < \varepsilon \iff \alpha^{n_0} < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{C\alpha^{-1}}$$

lze, neboť $\alpha \in (0,1)$

ad (ii): víme. $x_n \to t_0$

tedy $x_{n+1} \to t_0$

a navíc: $f(t_n) \to f(t_0)$

(spojitost f, Heineho věta)

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & f(t_n), \quad n\to\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_0 & = & f(t_0) \end{array}$$

Lemma 13.1. Nechť $\underset{\sim}{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$,

nechť $\underset{\sim}{x}^n = (x_1^n, \dots, x_N^n) \in \mathbb{R}^N$, $n = 1, 2, \dots$

Potom $\underset{\sim}{x}^n \to \underset{\sim}{x}^0$ v $\mathbb{R}^N$, $n \to \infty$, právě

když $x_j^n \to t_j^0$ v $\mathbb{R}$, $n\to\infty$, pro

$\forall j = 1, \dots N$ pevné.

Dk. 1. pomocný odhad

$$|x_j| \le \|\underset{\sim}{x}\| \le \sum_{j=1}^{N} |x_j|$$

kde $\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_N)$.

(i) $$\|\underset{\sim}{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right)^{1/2} \ge \left(x_j^2\right)^{1/2} = |x_j|$$

(ii) TRIK: $$\underset{\sim}{x} = x_1 \underset{\sim}{e}^1 + \dots + x_N \underset{\sim}{e}^N$$

kde $\underset{\sim}{e}^j = (0, \dots, 1, 0 \dots)$

j-té pozice

a tedy dle $\triangle$-nerovnosti:

$$\|\underset{\sim}{x}\| \le \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\|x_j \underset{\sim}{e}^j\|}_{\le |x_j| \cdot \|\underset{\sim}{e}^j\|} \le \sum_{j=1}^{N} |x_j|$$

$$\|\underset{\sim}{e}^j\| = 1$$

2. užitím 1 na $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^n - \underset{\sim}{x}^0$:

$$|x_j^n - x_j^0| \le \|\underset{\sim}{x}^n - \underset{\sim}{x}^0\| \le \sum_{j=1}^{N} |x_j^n - x_k^0|$$

Věta 13.10. Množ. $A \subset \mathbb{R}^N$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ A je omezené a uzavřené.

Dk. „$\Rightarrow$" … platí obecně (Věta 13.7)

„$\Leftarrow$" … buď $A \subset \mathbb{R}^N$ omezené, uzavřené

$\{\underset{\sim}{x}^n\} \subset A$

… cíl: $\exists$ podposl. $\{\underset{\sim}{x}^{k_n}\}$ t.ž.

$\underset{\sim}{x}^{k_n} \to \underset{\sim}{x}^0 \in A$.

omezenost A: $\exists K > 0 : \|\underset{\sim}{x}^n\| \leq K$

a tedy (L. 13.1) $|x_j^n| \leq K$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall j = 1, \dots, N$

speciálně $\{x_1^n\}_n \subset \mathbb{R}$ omezené

Věta 7.4 (Bolz.-Weier.) $\Rightarrow$ $\exists$ podposl. $\{x_1^{k_n}\}$

$\exists\, x_1^0 \in \mathbb{R}$ t.ž.

$x_1^{k_n} \to x_1^0, \; n \to \infty$

a dále stejně: $\exists$ podposl. (značené stejně)

$$1.\ \check{r}.\quad x_2^{k_n} \to x_2^0$$

obecně:

$$x_j^{r_n} \to x_j^0\ ,\ n \to \infty$$

pro $\forall j = 1, 2, \dots N$.

Lemma 13.1 $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{x}^{r_n} \to \underset{\sim}{x}^0\ ,\ n \to \infty$

kde $\underset{\sim}{x}^0 = (x_1^0, \dots x_N^0) \in \mathbb{R}^N$

avšak: $\underset{\sim}{x}^{r_n} \in A$ ... uzavřené

Věta 13.2 $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{x}^0 \in A$.

<u>Věta 13.11.</u> Prostor $\mathbb{R}^N$ je úplný.

<u>Dk.</u> nechť $\{\underset{\sim}{x}^n\} \subset \mathbb{R}^N$ splňuje (B.C.) podmínku, tj.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\|\underset{\sim}{x}^m - \underset{\sim}{x}^n\| < \varepsilon$$

Lemma 13.1. $\Rightarrow |x_j^m - x_j^n| \leq \| \underset{\sim}{x}^m - \underset{\sim}{x}^n \|$

$$j = 1, \dots N$$

a tedy $\{x_j^n\} \subset \mathbb{R}$ splňuje (B.C.)

Věta 7.5 $\Rightarrow \exists\, x_j^0 \in \mathbb{R}$ t.ž.
(viz ZS)

$$x_j^n \to x_j^0, \ n \to \infty$$

konečně (opět dle Lemmatu 13.1)

$$\underset{\sim}{x}^n \longrightarrow \underset{\sim}{x}^0, \ n \to \infty$$

kde $\underset{\sim}{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$