Def. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují bodově k $f(x)$ v I, jestliže:

$$\forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Značíme krátce $f_n(x) \to f(x)$, $x \in I$.

Příkl. (1) $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$, $x \in \mathbb{R}$

neboť: $f_n(x) = \exp\left(g_n(x)\right)$, kde

$$g_n(x) = n \cdot \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}_{\to 1} \cdot x$$

dle VoLSF, $x \neq 0$ pevné

$n \to \infty$

$x = 0$: $f_n(0) = (1+0)^n = 1 \to 1 = e^0$.

(2) $$f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} = \frac{x}{1/n + |x|} \to \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

celkem: $f_n(x) \to \operatorname{sgn}(x), \forall x \in \mathbb{R}$

③ $f_n(x) = n^2 x e^{-nx} \to 0, \quad x \in [0, +\infty)$

<u>Pozn.</u> nevýhody bodové konvergence:

$f_n(x)$ spoj., $f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f(x)$ spojité

(viz př. ②)

$f_n(x) \to f(x)$ v $[a,b] \not\Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$

(viz př. ③, $[a,b] = [0,1]$)

<u>Def.</u> Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ stejnoměrně v I, jestliže:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0):$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

<u>Pozn.</u> $f_n(x) \to f(x)$ v I:

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0):$$

lze prohodit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\underbrace{(\forall x \in I)(\exists n_0 \in \mathbb{N})}(\forall n \geq n_0):$$

<u>Věta 16.1.</u> Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v I, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I. Pak $f(x)$ je spoj. v I.

<u>dk.</u> cíl: $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x_0 \in I \ \exists \delta > 0$:

$$x \in U(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon).$$

$\varepsilon > 0$, $x_0 \in I$ dáno: víme $f_n \rightrightarrows f$ a tedy: $\exists n_0 \ \forall x \in I \ \forall n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$$

spec: $\boxed{(*) \ |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/3, \ \forall x \in I}$

dále víme: $f_{n_0}(x)$ spojitá v I, a tedy

$\exists \delta > 0$: $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

(++)

celkem tedy: $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta) \cap I$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x) - f(x_0)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{dle } (+)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{dle } (++)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon/3 \\ \text{dle } (+)}}$$

$$< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Věta 16.2. Nechť $f_n(x)$ spoj. v I, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I, kde $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený. Potom:

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx, \quad n \to \infty.$$

__dk.__ cíl $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$ t. ž. $n \geq n_0$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| < \varepsilon .$$

$\varepsilon>0$ dáno ... víme, že $f_n \rightrightarrows f$ v $[a,b]$, tj.

$\exists n_0$ t. ž. $|f_n(t)-f(t)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall t \in [a,b]$

nechť $n \geq n_0$:

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f|$$

$$= \int_a^b \underbrace{|f_n(t)-f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon$$

__Opakuj.__ $K = \sup g(I) = \sup\limits_{x \in I} g(x)$

právě když (i) $\forall x \in I: g(x) \leq K$

(ii) $\forall K' < K\ \exists x \in I: g(x) > K'$

tj. K je nejmenší horní odhad g v I.

__Lemma 16.1.__ Je ekvivalentní:

(1) $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ v I

(2) $\sigma_n \to 0$, $n \to \infty$, kde $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(t) - f(t)|$

(3) pro $\forall$ posl. $\{x_n\} \subset I$ platí, že

$$(f_n(t_n) - f(t_n)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

__dk.__ $(1) \Leftrightarrow (2)$ ... uvažme, že $\sigma_n \geq 0$ je nejmenší číslo t.ž. $|f_n(t) - f(t)| \leq \sigma_n$, $\forall x \in I$

ad „$\Rightarrow$": cíl $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0$:

$$|\sigma_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_n < \varepsilon$$

(neboť $\sigma_n \geq 0$).

$\varepsilon > 0$ dáno: víme, že $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ v I a tedy $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0$:

$$|f_n(t) - f(x)| < \underbrace{\varepsilon/2}_{\text{horní odhad}}, \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \sigma_n \leq \varepsilon/2 < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

ad „$\Leftarrow$": nechť $\sigma_n \to 0$, tj:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : \sigma_n < \varepsilon$

leč platí: $\underbrace{\forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n}$

$\Longrightarrow$ definice $f_n \rightrightarrows f$ v I.

---

(2) $\Rightarrow$ (3) nechť $\{x_n\} \subset I$ libovolné

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \underbrace{\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|}_{= \sigma_n}$$

leč: $\sigma_n \to 0$, užij Věta 2. (o dvou policajtech)

---

(3) $\Rightarrow$ (2) ... cíl $\sigma_n \to 0$, $n \to \infty$

TRIK: pro n pevné polož $\sigma_n' = \sigma_n - \frac{1}{n}$

zřejmě $\sigma_n' < \sigma_n$, a tedy (vlastnost (ii))

$\exists x_n \in I$ t.ž. $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \sigma_n' = \sigma_n - \frac{1}{n}$

odtud: $0 \le \sigma_n < \frac{1}{n} + \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\to 0,\ n \to \infty}$ (dle (3))

a tedy $\sigma_n \to 0$
(dvou policajtů)

<u>Příkl.</u> $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$; BÚNO $x \ge 0$
(liché fce)

$$0 \le f_n(x) \to f(x) = 0, \quad x \ge 0$$

- $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $[0, +\infty)$

  ... L. 16.1, bod (3) ... $x_n = \frac{1}{n}$

  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0$

- $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $[\Delta, +\infty)$, $\Delta > 0$ pevné

  ... L. 16.1, bod (3)

  $$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \le \frac{nx}{n^2x^2} \le \frac{1}{n\Delta}$$

  $$\Rightarrow \quad \sigma_n \le \frac{1}{n\Delta} \to 0, \ n \to \infty.$$