Věta 16.3. Jsou dány $f_n(t)$, $t \in I$.
Potom je ekvivalentní:
(1) $\exists f(t)$ takové, že $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ v I
(2) $\{f_n(t)\}$ splní (BC-st)

---

dk. „$\Rightarrow$" $\varepsilon > 0$ dáno ... víme, že

$f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ v I, a tedy:

$$\exists n_0 \; \forall t \in I \; \forall n \geq n_0 : |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

... a tedy: $\forall m, n \geq n_0$

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |f_n(t) - f(t) + f(t) - f_m(t)|$$

$$\leq \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|f(t) - f_m(t)|}_{< \varepsilon/2}$$

$$= \varepsilon \text{ , pro } \forall t \in I.$$

Tj. (BC-st) platí

„$\Leftarrow$": pozorují, že (BC-st) implikuje

(BC) pro $\{f_n(t)\}$, pro $t \in I$ pevné

Věta 7.5 $\to$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \mathbb{R}$,

označme ji $f(t)$.

zbývá: $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ v I

$\varepsilon > 0$ dáno ... dle (BC-st) víme, že

$\exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ \forall t \in I$ platí

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$n \geq n_0$, $t \in I$ pevné

$m \to \infty$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Důsledek. $C([a,b])$ je úplný m. z. vůči tzv. supremové metrice

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$$

---

dk. sestává z několika kroků ....

1. $f_n \to f$ v $C([a,b]) \iff f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I

$$\rho(f_n,f) \to 0,\quad n\to\infty$$

$$\parallel$$

$$\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)-f(x)| = \sigma_n$$

... a užiji Lemma 16.1.

2. $\{f_n\} \subset C([a,b])$ je cauchyovské

$\iff \{f_n(x)\}$ splňují (BC-s)

... dokáže se podobně jako (1) $\iff$ (2) v Lemmatu 16.1

CELKEM: buď $\{f_n\} \subset C([a,b])$ cauchyovské posloupnost

bod 2. $\Rightarrow$ $\{f_n(t)\}$ splní (BC-subst.)

Věta 16.3 $\Rightarrow$ $\exists f(t)$ t.ž. $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$

bod 1. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ v $C([a,b])$

Věta 16.1 $\Rightarrow$ $f(t)$ je spojité v $[a,b]$

tj. $f \in C([a,b])$

<u>Příkl.</u> $f_n(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{t\to\infty} f_n(t)\right)}_{\frac{\pi}{2}} \neq \lim_{t\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)}_{0}$$

Věta 16.4. [Moore–Osgood.]

nechť: 1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $P(x_0, \delta)$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$ zevně

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) =: C_n \in \mathbb{R}$

Potom: 1. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} C_n = C \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$

Dk. KROK I) ukážeme, že $\{C_n\}$ splňují (BC) podmínku

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 : |C_n - C_m| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ dáno ... víme, že $f_n(x)$ splňují (BC-st), dle V. 16.3 a předpokladu 1.

tj. $\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \ \forall x \in P(x_0, \delta)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$$

$$x \to x_0: \quad |c_n - c_m| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$$

... díky předpokladu 2.

tedy $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$ (Věta 7.5)

<u>KROK II</u> ukážu: $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\delta} > 0 \ \forall x \in P(x_0, \bar{\delta}): |f(x) - c| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{TRIK}}$ $|f(x) - c|$

$$= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - c_n + c_n - c|$$

$$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c|$$

$$=: P_1 + P_2 + P_3$$

$\varepsilon > 0$ dáno: najdu $n \in \mathbb{N}$ t.ž.

$|c_n - c| < \varepsilon/3$ (neboť $c_n \to c$)

$|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ pro $\forall t \in P(t_0, \delta)$

(neboť $f_n \rightrightarrows f$)

dále, pro toto n fixované zvolí,

že $f_n(t) \to c_n$, $x \to t_0$, a tedy

$\exists \bar{\delta} > 0$, BÚNO $\bar{\delta} < \delta$ t.ž.

$t \in P(t_0, \bar{\delta}) \Rightarrow |f_n(t) - c_n| < \varepsilon/3$

---

celkem máme $P_{1,2,3} < \varepsilon/3$

a tedy $|f(t) - c| < \varepsilon$

pro $\forall t \in P(t_0, \bar{\delta})$

Příkl.: na pořadí limit záleží, neb:

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in (0, +\infty)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{0} \neq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right)}_{\frac{\pi}{2}}$$