Příkl. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ ... (2π-per. v.r.t. x)

- konv. stejn. v $(\delta, 2\pi-\delta) = I$

dk. $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \leq M, x \in I$

kde $M = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$

$\frac{1}{k} \to 0$, které stejnoměrně v.r.t. x

... užij Větu 16.11. (abel)

- nekonv. stejn. v $(0, \delta)$, $\delta > 0$ pevné

dk. ověříme negaci (BC-st-r):

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \ \exists x \in I \ \exists m \geq n_0 \ \exists l \geq 1$

t.ž. $\left|\sum_{k=m+1}^{m+l} \frac{\sin kx}{k}\right| \geq \varepsilon$

polož $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ... n_0 dáno

vol $m \geq n_0$ t.ž. $x := \frac{\pi}{4m} \in (0, \delta)$

polož $l = m$

nyní pro $k = n+1, \dots n+n = 2n$

platí $kx = \frac{k\pi}{4n} \in \left(\frac{n+1}{n}\frac{\pi}{4}, \frac{2n}{n}\cdot\frac{\pi}{4}\right)$

$\subset \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,

a tedy $\sin kx \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{(\sin kx)}_{> \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{> \frac{1}{2n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Věta 16.13.</u> Nechť $f_k(t) \in C(I)$,

nechť $s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ stejnoměrně v I.

Potom $s(t) \in C(I)$.

<u>dk.</u> označ $s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)$, $n = 1, 2, \dots$

víme: $s_n(t) \in C(I)$ ... Věta 2.14, konečné indukce

$s_n(t) \rightrightarrows s(t)$ ... předpoklad

... a užiji Větu 16.1.

Věta 16.14. Nechť $f_k(x) \in C([a,b])$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konv. stejn. v $[a,b]$.

Potom: $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$.

Dk. označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$;

předpoklad: $\exists s(x)$ t.ž. $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v $[a,b]$

$s(x) \in C([a,b])$ ... Věta 16.1

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x) = \int_a^b s(x)}$ ... Věta 16.2.

$PS = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx$ ... definice $s(x)$

$LS = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx\right)}_{\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f_k(x)\,dx\right)}$ ... linearita integrálu (Věta 9.3)

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\,dx.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}$$

<u>Věta 16.15.</u> Nechť I je omezený, otevřený. Nechť $\exists f_k'(t)$ vlastní pro $\forall k$, $\forall t \in I$. Nechť $\sum f_k'(x)$ konv. stejnoměrně v I, nechť $\exists t_0 \in I$ t.ž. $\sum f_k(t_0)$ konv. Pak $\sum f_k(x)$ konv. stejnoměrně v I a platí $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)$, pro $\forall t \in I$.

<u>dk.</u> označme $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in I$

víme: $\exists s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(t)$ vlastní (Věta 4.2)

$\exists g(x)$ t.ž. $s_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I

(předpoklad: stejn. konv. $\sum f_k'(x)$)

$\exists\, t_0 \in I$ t.ž. $s_n(t_0) \to s(t_0)$

... užij větu 16.5 ...

$s_n(t) \rightrightarrows s(t)$ v I, a platí:

$$\underbrace{s'(t)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n'(t)}, \text{ tj.:}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right)' \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)$$