Věta 17.1. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je dán.

Potom:

1. $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$

2. $A_j \in \mathcal{S}$, $j \in \mathbb{N}$ libovolné

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$$

3. $A_j \in \mathcal{S}$, $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu A_j$$

4. $B_j \in \mathcal{S}$, $B_j \supset B_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, navíc

$$\mu B_1 < +\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu B_j .$$

Dk 1. $B = A \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{S}}$ ... disjunktní

$$\Rightarrow \mu B = \mu A + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu A$$

2. TRIK tzv. „zdisjunktnění":

položž $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_2 = A_1 \setminus A_2$

obecně: $\tilde{A}_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{i<j} A_i \right)$

zřejmě: $\tilde{A}_j \subset A_j$, $\tilde{A}_j \in \mathcal{S}$, disjunktní *)

a navíc: $\boxed{\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \text{, pro } \forall n \in \mathbb{N} \text{ nebo } n = \infty}$

*) proč: BÚNO $n < m$, pak ale

$\underbrace{\tilde{A}_n \subset A_n}$, $\tilde{A}_m \subset \left(\bigcup_{j<m} A_j \right)^c$, tj.:

speciálně: $\underbrace{\tilde{A}_m \subset A_n^c}$

a tedy $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset$.

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\mu \tilde{A}_j}_{\le \mu A_j}$$

3. opět pomocí $\tilde{A}_j \subset A_j$ jako výše:

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu \tilde{A}_j$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu \tilde{A}_j = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j\Big)$$

avšak: $$\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstrukce} \\ \tilde{A}_j}}{=} \bigcup_{j=1}^{n} A_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonie } A_j}}{=} A_n, \ \forall n.$$

---

4. pomocné množiny $A_j = B_1 \setminus B_j$, $j = 1, 2, \dots$

platí: $A_j \subset A_{j+1}$, neboť $B_j \supset B_{j+1}$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = B_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \quad \text{(de Morgan)}$$

bod 3 $\to$

$$\mu\Big(B_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_j)$$

píšeme: $B_1 = (B_1 \setminus B_j) \cup B_j$

$$B_1 = \left(B_1 \setminus \bigcap_j B_j\right) \cup \bigcap_j B_j$$

$$\mu B_1 = \mu(B_1 \setminus B_j) + \mu B_j$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad (j \to \infty)$$

$$= \mu\left(B_1 \setminus \bigcap B_j\right) + \mu\left(\bigcap B_j\right)$$

__důležité:__ $\mu B_1 < +\infty$, lze užít VoAL

__Příkl.__ $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{S} = 2^{\mathbb{N}}$, π ... počítací míra

$B_j = \{j, j+1, \dots\} = \mathbb{N} \cap [j, +\infty)$

vidíme: $\pi B_j = +\infty$, pro $\forall j = 1, 2, \dots$

ale: $\pi\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \pi\emptyset = 0$

... předpoklad konečnosti míry B_1

nelze obecně vynechat ...

Věta 17.2. Nechť $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ jsou libovolné. Pak $\lambda_n^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n^*(M_j)$.

dk. BÚNO: $\lambda^*(M_j) < +\infty$ pro $\forall j$

(jinak $PS = +\infty$, nerovnost platí)

cíl: $\boxed{\lambda^*\left(\bigcup_j M_j\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(M_j) + \varepsilon \quad \text{pro } \forall \varepsilon > 0}$

($\Rightarrow$ jsem hotov: stačí $\varepsilon \to 0+$)

$\varepsilon > 0$ dáno libovolné:

$$\lambda^*(M_j) + \frac{\varepsilon}{2} > \lambda^*(M_j) = \inf \left\{ \sum_i \ell(Q_i^1) \right.$$

... vlastnost (ii) infima:

$\exists\, Q_i^1$, $i \in \mathbb{N}$ t.ž. $M_1 \subset \bigcup_i Q_i^1$

intervaly

$$\sum_i \ell(Q_i^1) < \lambda^*(M_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

.. obecněji, pro $\forall j$ $\exists Q_i^j$, $i \in \mathbb{N}$ t.ž.

$$\Pi_j \subset \bigcup_i Q_i^j$$

$$\sum_i \ell(Q_i^j) < \lambda^*(\Pi_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

---

celkem tedy: $\displaystyle \bigcup_j \Pi_j \subset \underbrace{\bigcup_{j,i} Q_i^j}_{\text{spočetné pokrytí}}$

$$\Rightarrow \lambda^*\Big(\bigcup_j \Pi_j\Big) \le \sum_{i,j} \ell(Q_i^j)$$

$$= \sum_j \underbrace{\sum_i \ell(Q^j)}_{< \lambda^*(\Pi_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}} = \sum_j \lambda^*(\Pi_j) + \varepsilon .$$

Lemma 17.1. Nechť $K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, nechť K je kompaktní, A_j otevřené. Pak $\exists n \in \mathbb{N}$ t.ž. $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Dk. ?? $K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \neq \emptyset$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ posl. $\{x_n\}$ t.ž. $x_n \in K$

a zároveň $x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, $\forall n$

K kompaktní: $\exists x_0 \in K$ hromadný bod

tj. $\forall \varepsilon > 0$: $x_n \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n

avšak: $x_0 \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, tj. $\exists m \in \mathbb{N}$

t.ž. $x_0 \in A_m$

A_m otevřené: $\exists \varepsilon > 0$ t.ž.

$\mathcal{U}(x_0, \varepsilon) \subset A_m$

SPOR: pro $n \geq m$ je zřejmě

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_n \subset K - A_m$$

tedy $x_n \notin \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$.