<u>Lemma 18.1.</u> Nechť $f(x): M \to \mathbb{R}^*$, kde $M \in \mathcal{M}$. Potom je ekvivalentní:

<u>1.</u> f je měřitelná

<u>2.</u> $\{f \geq c\} \in \mathcal{M}$ pro $\forall c \in \mathbb{R}$

<u>3.</u> $\{f < c\} \in \mathcal{M}$ pro $\forall c \in \mathbb{R}$

<u>4.</u> $\{f \leq c\} \in \mathcal{M}$ pro $\forall c \in \mathbb{R}$

<u>5.</u> $\{f \in I\} \in \mathcal{M}$ pro $\forall I \subset \mathbb{R}^*$ interval

<u>6.</u> $\{f \in G\} \in \mathcal{M}$ pro $\forall G \subset \mathbb{R}$ otevřenou

---

<u>Dk.</u> připomeň zkrácené značení:

$$\{f \in I\} = \{x \in M ; f(x) \in I\} = f^{-1}(I)$$

<u>1. ⇒ 2.</u> $$[c, +\infty] = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} (c - 1/j, +\infty]$$

a tedy $$\{f \geq c\} = \underbrace{\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \underbrace{\{f > c - 1/j\}}_{\in \mathcal{M} \text{ (dle 1.)}}}_{\text{spočetný průnik } \in \mathcal{M}}$$

2 ⇒ 1. analogicky díky rovnosti

$$\{f > c\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{f \geq c + 1/j\}$$

1. ⇔ 4. $\{f > c\} = \Omega \setminus \{f \leq c\}$,

a užijeme: $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$

2. ⇔ 3. podobně díky vztahu:

$$\{f \geq c\} = \Omega \setminus \{f < c\}$$

---

5. ⇒ 1. snadné, neboť:

$$\{f > c\} = \{f \in \underbrace{(c, +\infty]}_{\text{"} I \subset \mathbb{R}^* \text{ interval}}\}$$

obráceně: 1, 2, 3, 4 ⇒ 5. též snadné,

např. pro $I = [0, 1)$ píšeme:

$$\{f \in I\} = \{f \geq 0\} \cap \{f < 1\} \in \mathcal{M}$$

(dle 3., 1.)

6. ⇒ 1. zřejmé: $G = (c, +\infty] \subset \mathbb{R}^*$ je otevřené

$$\{f > c\} = \{f \in G\}$$

5. ⇒ 6. užiji trik: G otevřené dáno, lze psát:

$$\boxed{G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j}$$

; kde $I_j = (a_j, b_j)$ jsou všechny „racionální intervaly" v G, tj. takové, že

$$\boxed{I_j \subset G, \quad a_j, b_j \in \mathbb{Q}}$$

?

$\supset$ ... zřejmé

$\subset$ ... díky otevřenosti G a hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$

spočetné sjednocení $\Leftarrow$ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ spočetné

celkem tedy:

$$\{f \in G\} = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{\{f \in I_j\}}_{\in \mathcal{M} \text{ (dle 5.)}}}_{\in \mathcal{M} \text{ spočetné sjednocení}}$$

Lemma 18.2 Nechť $M \in \mathfrak{M}$, $f: M \to \mathbb{R}$ a lze psát $M = G \cup N$, kde N je míry nula, G je otevřené, f spojité v G. Pak f je měřitelné v M.

Dk. buď $c \in \mathbb{R}$ libovolné:

$$\{f > c\} = \{x \in M,\ f(x) > c\}$$

$$= \underbrace{\{x \in G,\ f(x) > c\}}_{\substack{f^{-1}((c,+\infty)) \\ \text{otevřené (Věta 13.5)} \\ \text{a tedy } \in \mathfrak{M} \\ \text{(Věta 17.4)}}} \cup \underbrace{\{x \in N,\ f(x) > c\}}_{\substack{\subset N, \\ \text{je míry nula} \\ \text{a tedy měřitelné} \\ \text{(Věta 17.5, bod 2)}}}$$

Lemma 18.3. Nechť $f: M \to \mathbb{R}$ je měřitelná, nechť $f(M) \subset G$, kde $G \subset \mathbb{R}$ je otevřené. Nechť $\phi: G \to \mathbb{R}$ je spojité. Potom $\phi \circ f$ je měřitelné v M.

dk. buď $c \in \mathbb{R}$ dáno:

$$\{\phi \circ f > c\} = \{x \in M;\ \phi(f(x)) > c\}$$

$$= \{x \in M,\ f(x) \in H\} = \{f \in H\}$$

kde $H = \{y \in G,\ \phi(y) > c\}$

$= \phi^{-1}((c, +\infty))$ ... otevřená

(Věta 13.5)

$\Rightarrow \{f \in H\} \in \mathcal{M}$ (Lemma 18.1, bod 5)

Věta 18.1. [Zachování měřitelnosti.]

dk. 1. $\boxed{\alpha \cdot f}$? ... $c \in \mathbb{R}$ dáno

$\alpha > 0$: $\{\alpha \cdot f > c\} = \{f > c/\alpha\}$

$\alpha < 0$: $\{\alpha \cdot f > c\} = \{f < c/\alpha\}$

měřitelné

(viz Lemma 18.1)

$f+g$? TRIK:

$$\{f+g>c\} = \bigcup_{\substack{r,q\in\mathbb{Q}\\ r+q>c}} \underbrace{\left(\{f>r\}\cap\{g>q\}\right)}_{\in \mathcal{M}}$$

(množinové operace)

?

$\supset$ ... jasné

$\subset$ ... nechť $x \in LS$, tj.

$f(x)+g(x) = y$, kde $y = c+\varepsilon$, $\varepsilon>0$

... zvolme $r,q\in\mathbb{Q}$ t.ž.:

$$f(x) > r > f(x) - \varepsilon/2$$
$$g(x) > q > g(x) - \varepsilon/2$$

... pak ale zřejmě:

$x \in \{f>r\}\cap\{g>q\}$,

$r+q > f(x)+g(x) - \varepsilon = c$,

neboli $x \in PS$

$f \cdot g$? ... pomocné úvahy.

f měřitelná $\Rightarrow f \cdot f = f^2$ měřitelná

(Lemma 18.3, $\phi(y) = y^2$)

TRIK: $f \cdot g = \frac{1}{4} \underbrace{\left((f+g) - (f-g)^2 \right)}_{\text{měřitelné dle předchozích úvah}}$

f/g ? ... stačí měřitelnost $1/g$ na množině $\{g \neq 0\} = N$

mimochodem, $N = \{g > 0\} \cup \{g < 0\} \in \mathcal{M}$

$$\{1/g > c\} = \{x \in N, 1/g > c\}$$

$$= \underbrace{\left(\{g > 0\} \cap \{1 > c \cdot g\} \right) \cup \left(\{g < 0\} \cap \{1 < c \cdot g\} \right)}_{\in \mathcal{M} \text{ ... opět viz výše}}$$

2. $\boxed{\max\{f,g\}}$? ... stačí ověřit, že

$$\{\max\{f,g\}>c\} = \{f>c\}\cup\{g>c\}$$

... a dále např. pomocí vztahů:

$$\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$$

$$f^+ = \max\{f,0\}, \quad f^- = \max\{-f,0\}$$

$$|f| = f^+ + f^- \quad (\text{nebo } L.18.3,\ \phi(y)=|y|)$$

---

3. $\boxed{\sup_j f_j}$?

připomeň: $\left(\sup_j f_j\right)(x) = \sup\{f_j(x),\ j\in\mathbb{N}\}$

ukážeme, že $\boxed{\{(\sup f_j)>c\} = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{f_j>c\}}$

($\Rightarrow$ jsem hotov: zřejmě PS $\in \mathcal{M}$)

$\boxed{\text{ad } „\subset“}$ ... $x\in$ LS ... dle vlastnosti (ii) suprema $\exists j$ t.ž. $f_j(x)>c$

tedy $x \in \{f_j > c\} \subset PS$

$\boxed{\text{ad „}\supseteq\text{"}}$ ... $x \in PS \Rightarrow \exists j$ t.ž. $x \in \{f_j > c\}$

a tedy $(\sup f_j)(x) \geq f_j(x) > c$

.... $x \in LS$

$\lim\limits_{j\to\infty} f_j$? .... pomocí pojmů lim sup a lim inf...

$$\boxed{\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} f_j(x) &:= \lim_{j\to\infty}\left(\sup_{l\geq j} f_l(x)\right) \\ \liminf_{j\to\infty} f_j(x) &:= \lim_{j\to\infty}\left(\inf_{l\geq j} f_l(x)\right) \end{aligned}}$$

Lze ukázat:

(i) posl. $\left\{\sup\limits_{l\geq j} f_l(x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ je nerostoucí

$$\Rightarrow \exists \lim_{j\to\infty}\left(\sup_{l\geq j} f_l(x)\right) = \inf_{j\geq 1}\left(\sup_{l\geq j} f_l(x)\right)$$

(viz Věta 7.2)

není, $\limsup\limits_{j\to\infty} f_j(x)$ je největší

hromadný bod posl. $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$

(ii) analogicky:

$$\exists \liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_{j\geq 1}\left(\inf_{l\geq j} f_l(x)\right)$$

a je to nejmenší hromadný bod $\{f_j(x)\}$

(iii) obecně platí:

$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x) \leq \limsup_{j\to\infty} f_j(x),$$

přičemž $\boxed{=}$ nastává, právě když

$$\exists \lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

(iv) odsud pak dostaneme:

$$L = \{x\in\Omega;\ \exists \lim_{j\to\infty} f_j(x)\} \in \mathfrak{M}$$

$$x \longmapsto \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ je měřitelná funkce}$$

<u>Věta 18.2.</u> Nechť $f \geq 0$, měřitelná v M. Pak $\exists$ jednoduché, měřitelné f_k t.ž. $0 \leq f_k \nearrow f$ v M.

<u>Dk.</u> TRIK: binární rozvoj $a \in R, a \geq 0$.

$$a = \dots 1010.100110\dots$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j [a]_j \; ; \quad [a]_j \in \{0,1\}$$

… j-tá číslice

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\left(\sum_{j=-k}^{k} 2^j [f(x)]_j \right)}_{f_k(x)}$$

zřejmě: $0 \leq f_k \nearrow f$, $\forall x \in M$

$$f_k(x) = \sum_{j=-k}^{k} 2^j \chi_{A_j}(x) \; ;$$

kde $A_j = \{ x \in M \; ; \; [f(x)]_j = 1 \}$

zbývá rozmyslet: $A_j \in \mathfrak{M}$?

$$A_0 = \{[f]_0 = 1\} = \bigcup_{\substack{i \geq 1,\\ \text{liché}}} \{f \in [i, i+1)\}$$

obecněji:

$$A_j = \{[f]_j = 1\} = \bigcup_{\substack{i \geq 1,\\ \text{liché}}} \underbrace{\{2^{-j} f \in [i, i+1)\}}_{\substack{\in \mathfrak{M} \\ \text{(viz L. 18.1)}}}$$

<u>Věta 18.3.</u> Nechť $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$, nechť $f = g$ s.v. v Ω. Potom f je měřitelná $\Leftrightarrow$ g je měřitelná, a $\int_\Omega f \, d\lambda = \int_\Omega g \, d\lambda$, <u>má-li</u> jedna strana smysl.

<u>dk</u> $\Omega = \tilde{\Omega} \cup N$, kde $\lambda(N) = 0$

$$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus N \in \mathfrak{M}$$

I) nechť: f měřitelná $\underset{?}{\Longrightarrow}$ g měřitelná?

$c \in \mathbb{R}$ dáno:

$$\{g > c\} = \{x \in \Pi, g(x) > c\}$$

$$= \underbrace{\{x \in \tilde{\Pi}, g(x) > c\}}_{\substack{= \{x \in \tilde{\Pi}, f(x) > c\} \\ \in \mathcal{M} \\ \text{(měřitelnost } f\text{)}}} \cup \underbrace{\{x \in N, g(x) > c\}}_{\substack{\subset N, \\ \text{a tedy} \in \mathcal{M} \\ \text{(Věta 17.5)}}}$$

II) integrál:

1. f, g jednoduché, měřitelné.

nechť $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}$; $A_j \in \mathcal{M}$

polož $\tilde{f} = \begin{cases} 0, & x \in N \\ f, & x \in \tilde{\Pi} \end{cases}$

tj. zřejmě $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{\tilde{A}_j}$, $\tilde{A}_j = A_j - N$

zřejmě $\lambda(A_j) = \lambda(\tilde{A}_j)$, pro $\forall j$

a tedy $$\int_\Pi f \, d\lambda = \int_\Pi \tilde{f} \, d\lambda.$$

podobná úvaha: polož $\tilde{g} = \begin{cases} 0, & x \in N \\ g, & x \in \tilde{\Pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_\Pi g = \int_\Pi \tilde{g} \, d\lambda.$$

avšak $f = g$ na $\tilde{\Pi}$, tj. $\tilde{f} = \tilde{g}$ na Π,

odtud $\int_\Pi \tilde{f} \, d\lambda = \int_\Pi \tilde{g} \, d\lambda$, a tedy též

$$\int_\Pi f \, d\lambda = \int_\Pi g \, d\lambda.$$

---

2. $f, g \geq 0$, měřitelné

$$\int_\Pi f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_\Pi s \, d\lambda, \ 0 \leq s \leq f \right\}$$

$$\int_\Pi g \, d\lambda = \sup \left\{ \int_\Pi t \, d\lambda, \ 0 \leq t \leq g \right\}$$

... kde s, t ... jednoduché, měřitelné

BÚNO: $s, t = 0$ na N

dle 1. se nemění $\int_\Omega s\,d\lambda, \int_\Omega t\,d\lambda$,

leč platí $s \leq f \iff t \leq g$

$\Rightarrow$ PS se rovnají, a tedy LS také...

---

3. f, g.. obecné, měřitelné...

$f = g$ s.v. $\Rightarrow f^+ = g^+, f^- = g^-$ s.v.

a tedy $\int_\Omega f^+ d\lambda = \int_\Omega g^+ d\lambda$
(bod 2.)

$$\int_\Omega f^- d\lambda = \int_\Omega g^- d\lambda$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f\,d\lambda = \int_\Omega g\,d\lambda$$