<u>Věta 18.4.</u> [Leviho.] Nechť $f, f_n$ jsou nezáporné, měřitelné v $M$, nechť $0 \le f_n \nearrow f$ s.v. v $M$. Potom:

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda .$$

---

<u>Dk.</u> <u>1.</u> „$\le$" ... snadné, neboť

$$f_n \le f_{n+1} \le f \quad \forall n, \text{ BÚNO } \forall x \in M$$

$\Rightarrow \left\{\int_M f_n \, d\lambda\right\}_n$ neklesající, $\le \int_M f \, d\lambda$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \sup\limits_{n \ge 1} \int_M f_n \, d\lambda$

$$\le \int_M f \, d\lambda .$$

---

<u>2.</u> „$\ge$": buď $K < \int_M f \, d\lambda$, pevné, libovolné

vlastnost (ii) suprema $\Rightarrow$

$\exists\, s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{A_j}$ ... jednoduché, měřitelné

1. ž. $\int_{\Pi} s \, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j) > K$

$\boxed{\text{BÚNO:}}$ $c_j > 0$, $A_j$ disjunktní

$s < f$ na $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$, tj. $c_j < f(x)$

pro $\forall\, x \in A_j$, $\forall j$

$\boxed{\text{pomocné množiny:}}$

$$A_j^n = \{x \in A_j,\ f_n(x) > c_j\}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$, $j$ .. pevné

dle předpokladů $f_n(x) \nearrow f(x) > c_j$

pro $x \in A_j$

<u>odsud</u>: $A_j^n \subset A_j^{n+1}$,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_j^n = A_j$$

Věta 17.1 $\Rightarrow$ $\lambda(A_j^n) \to \lambda(A_j)$,

pro $n \to \infty$

odtud dle VoAL:

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j^n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j) = \int_{\Omega} s \, d\lambda$$

$\Rightarrow$ fixuji $n \in \mathbb{N}$ velké t.ž.:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j^n)}_{\substack{\| \\ \int_{\Omega} t_n \, d\lambda}} > K.$$

$\int_{\Omega} t_n \, d\lambda$, kde $t_n = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{A_j^n}$

zřejmě: $t_n$ ... jednoduché, nezáporné

$$0 \le t_n \le f_n \text{ všude v } \Omega$$

$$(x \in A_j^n \Rightarrow t_n = c_j < f_n)$$

odtud plyne: $\int_{\Pi} f_n \, d\lambda \geq \int_{\Pi} t_n \, d\lambda$,

tedy: $\int_{\Pi} f_n \, d\lambda > K$, tím spíše pak

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Pi} f_n \, d\lambda > K$$

avšak: $K < \int_{\Pi} f \, d\lambda$ libovolně blízko

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_{\Pi} f_n \, d\lambda \geq \int_{\Pi} f \, d\lambda$$

---

<u>Věta 18.5.</u> [Vlastnosti Leb. int.]

Nechť $f, g \in \mathcal{L}^*(\Pi)$. Potom:

<u>1.</u> (i) $\int_{\Pi} \alpha \cdot f \, d\lambda = \alpha \int_{\Pi} f \, d\lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{\Pi} (f+g) \, d\lambda = \int_{\Pi} f \, d\lambda + \int_{\Pi} g \, d\lambda$,

má-li P.S. smysl

<u>2.</u> (i) $f \leq g$ s.v. $\Rightarrow \int_{\Pi} f \, d\lambda \leq \int_{\Pi} g \, d\lambda$

(ii) $\left| \int_\Omega f \, d\lambda \right| \leq \int_\Omega |f| \, d\lambda$

3. $f \geq 0$ s.v. v $\Omega$

(i) $\int_\Omega f \, d\lambda < +\infty \Rightarrow f < +\infty$ s.v.

(ii) $\int_\Omega f \, d\lambda = 0 \iff f = 0$ s.v.

---

dk. (1i) ... d.d.cv., (1ii) ... později ...

(2i) tj. monotonie integrálu

- $f, g$ ... jednoduché, měřitelné:

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{B_j}$$

BÚNO: $m = n$, $A_j = B_j \ \forall j$

(společné zjemnění)

odsud $f \leq g \Rightarrow c_j \leq d_j$, a tedy

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda(A_j) \leq \sum_{j=1}^{m} d_j \lambda(A_j) = \int_\Omega g \, d\lambda$$

- $0 \le f \le g$ měřitelné:

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_\Omega s \, d\lambda, \ 0 \le \boxed{s \le f} \right\}$$

$$\int_\Omega g \, d\lambda = \sup \left\{ \int_\Omega s \, d\lambda, \ 0 \le \boxed{s \le g} \right\}$$

... větší množina ⇒ větší sup
(ne menší) (ne menší)

- $f, g$ ... obecné, měřitelné:

$$f \le g \Rightarrow f^+ \le g^+, \ \boxed{f^- \ge g^-}$$

dle předchozího bodu:

$$\int_\Omega f^+ d\lambda \le \int_\Omega g^+ d\lambda, \quad \int_\Omega f^- d\lambda \ge \int_\Omega g^- d\lambda$$

odečteme

$$\underbrace{\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-}_{\int_\Omega f} \le \underbrace{\int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-}_{\int_\Omega g}$$

3. $f \geq 0$, měřitelná:

(i) $\int_\Omega f = K < +\infty \Rightarrow \lambda(N) = 0$,

kde $N = \{x \in \Omega, f(x) = +\infty\}$

$\boxed{\text{TRIK}}$: $n \in \mathbb{N}$ ... libovolné

$s = n \cdot \chi_N$ ... jednoduché, měřitelné

$$0 \leq s \leq f$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Omega s \, d\lambda}_{\substack{\| \\ n\lambda(N)}} \leq \underbrace{\int_\Omega f \, d\lambda}_{K}$$

$$n\lambda(N) \leq K$$

tj. $\lambda(N) \leq \frac{K}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ libovolné

$\Rightarrow \lambda(N) = 0$.

---

(ii) $\int_\Omega f \, d\lambda = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ s.v.

„$\Longleftarrow$" ... jasné (Věta 18.3)

„$\Rightarrow$": $f \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$,

kde $A = \{f > 0\}$.

TRIK

$$\boxed{A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}$$ kde $A_j = \{f > 1/j\}$

$\supseteq$ ... jasné: $A_j \subset A$, $\forall j$

$\subseteq$ ... nechť $x \in A$, tj.

$f(x) > 0$ ... volme $j \in \mathbb{N}$

t.ž. $f(x) > \frac{1}{j}$,

neboli: $x \in A_j$.

ukážeme: $\lambda(A_j) = 0$, pro $\forall j$

($\Rightarrow$ jsem hotov, neboť pak:

$\lambda(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) = 0$, díky

Věta 17.1, bod 2 )

?? $\exists j$ t.ž. $\lambda(A_j) > 0$

... položme $s = \frac{1}{j}\chi_{A_j}$ ... jednoduché, měřitelné

$$0 \le s \le f \text{ v } \Pi$$

neboť $s = \begin{cases} 1/j < f \text{ v } A_j \\ 0 \le f \text{ jinde} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_\Pi s\,d\lambda}_{\frac{1}{j}\lambda(A_j)} \le \underbrace{\int_\Pi f\,d\lambda}_{= 0}$$

$$\frac{1}{j}\lambda(A_j) \le 0$$

$\Rightarrow \lambda(A_j) = 0$ ... SPOR.

---

(1i) ... d. cv.

1ii) cíl: $\int_\Pi (f+g)\,d\lambda = \int_\Pi f\,d\lambda + \int_\Pi g\,d\lambda$

- $f, g$ ... jednoduché, měřitelné
  snadné (společné dělení)

- $f, g \geq 0$, měřitelné:

dle Věty 18.2: $\exists$ jednoduché, měřitelné

$$0 \leq s_k \nearrow f$$

$$0 \leq t_k \nearrow g$$

a tedy také $0 \leq s_k + t_k \nearrow (f+g)$

(s.v. v $\Pi$)

dle předchozího & Věty 18.4. (Levi):

$$\underbrace{\int_\Pi (s_k + t_k)\,d\lambda}_{} = \underbrace{\int_\Pi s_k\,d\lambda}_{} + \underbrace{\int_\Pi t_k\,d\lambda}_{}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_\Pi (f+g)\,d\lambda = \int_\Pi f\,d\lambda + \int_\Pi g\,d\lambda$$

---

- $f, g \in \mathcal{L}^*(\Pi)$ obecné:

položme: $\underline{h(x) := f(x) + g(x)}$, $x \in \Pi$

cíl: $\boxed{\int_\Pi h\,d\lambda = \int_\Pi f\,d\lambda + \int_\Pi g\,d\lambda}$

Poznámka: $h(t)$ má smysl s.v. v $\Pi$

??, $\exists N$ s.ž. $\lambda(N)>0$, a zde

$$f(x)=+\infty,\ g(x)=-\infty,\ x\in N$$

pak ale $f^+=+\infty$ na $N$, a tedy

$$\int_\Pi f^+ d\lambda \geq \int_N f^+ d\lambda = +\infty,$$

musí tedy: $\int_\Pi f\, d\lambda = +\infty$

analogicky: $\int_\Pi g\, d\lambda = -\infty$,

a tedy PS nemá smysl: SPOR.

---

píšeme tedy, pro s.v. $x\in\Pi$:

$$h=f+g$$

$$(h^+-h^-)=(f^+-f^-)+(g^+-g^-)$$

$$h^++f^-+g^-=f^++g^++h^-$$

... dle předchozího bodu:

$$\int_\Omega h^+ + \int_\Omega f^- + \int_\Omega g^- = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega g^+ + \int_\Omega h^-$$

$$\underbrace{\left(\int_\Omega h^+ - \int_\Omega h^-\right)}_{\int_\Omega h} = \underbrace{\left(\int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-\right)}_{\int_\Omega f} + \underbrace{\left(\int_\Omega g^+ - \int_\Omega g^-\right)}_{\int_\Omega g}$$

... úpravy jsou dovoleny,
neboť P.S. má smysl (předpoklad)

---

2ii) konečně, můžeme psát:

$$\left|\int_\Omega f \, d\lambda\right| = \left|\int_\Omega f^+ d\lambda - \int_\Omega f^- d\lambda\right|$$

$$\leq \left|\int_\Omega f^+ d\lambda\right| + \left|\int_\Omega f^- d\lambda\right|$$

$$= \int_\Omega f^+ d\lambda + \int_\Omega f^- d\lambda = \int_\Omega \underbrace{(f^+ + f^-)}_{|f|} d\lambda$$

($\Delta$-nerovnost v $\mathbb{R}^*$)