Definice. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme *izolovanou singularitou* funkce $f(z)$, jestliže $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$ pro jisté $\delta > 0$. V této situaci existuje (viz Věta 23.10) jednoznačně určená Laurentova řada taková, že

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \qquad \forall z \in P(z_0, \delta)$$

Koeficient a_{-1} nazýváme *reziduum* funkce $f(z)$ v bodě z_0 a značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Platí totiž

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}$$

pro každou kladně orientovanou Jordanovu křivku, obíhající z_0. Tj. reziduum jako „to, co zbyde“, rozuměj po integraci.

Věta 23.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je oblast, K je konečná množina singularit. Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int} \varphi \subset \Omega$ a $\langle \varphi \rangle \cap K = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int} \varphi} \operatorname{res}_{\zeta} f(z) \,.$$

Jak vypočítat reziduum? Přímo z definice, nalezením (příslušné části) Laurentova rozvoje. Nebo pomocí některého ze vzorečků, viz následující věta.

Věta 23.13. [Pravidla pro výpočet rezidua.]

1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

   $$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

   $$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \,.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ bodu 1: je-li $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0))$, pak

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0) \,, \qquad \operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g'(z_0) \,.$$

Příklad. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi/2$; pomocí reziduové věty integrací přes velkou půlkružnici.

Příklad. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x(x^2+9)} = \pi(1 - \mathrm{e}^{-3})/9$; integrací $\mathrm{e}^{iz} / z(x^2 + 9)$ přes velkou půlkružnici mínus malou půlkružnici kolem počátku.

Příklad. $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{1-2a\cos x+a^2} = \pi/a^2$, kde $a > 1$. Pomocí „substituce“ $z = \mathrm{e}^{ix}$ převedu na na integraci podle jednotkové kružnice. Máme

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) , \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) , \quad dx = \frac{dz}{iz} .$$