<u>Pozorování</u>: $f$ po částech spoj. v $[a,b]$

$\Rightarrow$ omezené, měřitelné; spec. $L^1(a,b)$.

<u>dk.</u> • měřitelnost $\Leftarrow$ Lemma 18.2

neboť: $[a,b] = G \cup N$, kde

$G = \bigcup_{j=1}^{n} (x_{j-1}, x_j)$ je otevřené,

$f$ je zde spojité

$N = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ míry nula

(Věta 17.5)

• omezenost: $\exists M > 0 \ \forall x \in G : |f(x)| \leq M$ (v $G$)

SPOREM: ?? $\forall M > 0 \ \exists x \in G : |f(x)| > M$

volme $M = n \in \mathbb{N} \dots \exists x_n$ t.ž. $|f(x_n)| \to \infty$

BÚNO: $x_n \in (x_{j-1}, x_j) \ \forall n$, vhodné $j$

dále: $x_n \to x_0 \in [x_{j-1}, x_j]$ (V.7.

pak ale buď $x_0 \in (x_{j-1}, x_j)$,

nebo $x_n \to x_{j-1}-$, nebo $x_n \to x_j+$,

$\Rightarrow f(x_n) \to L \in \mathbb{R} \dots$ SPOR.

Věta 21.2 [O konvergenci F. řady.]

dk. 1. KROK : princip lokalizace (Riemann):

$$\boxed{\begin{gathered} F_{n,f}(t) \to A \in \mathbb{R}, \ n \to \infty \\ \text{právě když:} \\ \int_0^\delta \left[ f(t+r) + f(t-r) - 2A \right] D_n(r)\,dr \to 0, \\ \text{pro } n \to \infty, \ \delta \in (0,\pi) \text{ jemné, libovolné} \end{gathered}}$$

dk.: lze psát (viz Lemma 21.3):

$$\pi \left( F_{f,n}(t) - A \right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t+r) D_n(r) - \pi A$$

$$= \int_0^{\pi} f(t+r) D_n(r)\,dr + \int_{-\pi}^{0} f(t+r) D_n(r)\,dr$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} A \cdot D_n(r)\,dr$$

$$= \int_0^\pi f(x+r) D_n(r) + \int_0^\pi f(x-r) D_n(r)\, dr$$

$$- \int_0^\pi 2A \cdot D_n(r)\, dr$$

(díky sudosti $D_n(r)$), a tedy:

$$= \int_0^\pi \left[ f(x+r) + f(x-r) - 2A \right] D_n(r)\, dr$$

$$= \int_0^\delta (\dots) + \int_\delta^\pi (\dots) = I_n^1 + I_n^2,$$

kde $\delta > 0$ je zatím libovolné…

Ukážu, že $I_n^2 \to 0$, $n \to \infty$ vždy.
($\Rightarrow$ jsem hotov, neboť potom $F_{f,n}(x) \to A$ právě když $I_n^1 \to 0$, což je právě „princip lokalizace").

… užiji Lemma 21.4. …

$$D_n(r) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)r}{2\sin r}, \quad \text{a tedy:}$$

$$I_n^2 = \int_\delta^\pi h(r)\cdot\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)r\,dr,$$

kde $\boxed{h(r) = \dfrac{f(x+r)+f(x-r)-2A}{2\cdot\sin\frac{r}{2}}}$

Zřejmě $h(r) \in L^1(\delta,\pi)$, neboť jmenovatel je spojitý, $\geq 2\cdot\sin\frac{\delta}{2}$, čitatel je OK, neboť $f \in L^1$.

Lemma 21.4. $\Rightarrow I_n^2 \to 0,\ n\to\infty$. (R.-L.).

---

<u>2. KROK</u>: aplikuji 1. KROK pro volbu

$$A = \tfrac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right)$$

stačí tedy dokázat, že:

$$\int_0^\delta \left[f(x+r)+f(x-r)-f(x+)-f(x-)\right]D_n(r)\,dr \to 0, \text{ pro } n\to\infty,$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ malé jsou zevné.

Opět užiji Lemma 21.4., neboť předchozí integrál přepíšu jako:

$$\int_0^\delta h(r) D_n(r)\, dr\,,$$ kde klademe:

$$h(r) = \left(\frac{f(x+r)-f(x+)}{r} + \frac{f(x-r)-f(x-)}{r}\right)\frac{r}{2\sin\frac{r}{2}}$$

Zbývá ověřit, že $h(r) \in L^1(0,\delta)$.

$\delta > 0$ malé $\Rightarrow$ $h(r)$ spojité v $(0,\delta]$,

stačí ukázat, že $\exists \lim\limits_{r\to 0+} h(r) \in \mathbb{R}$.

... např. pro 1. člen (ostatní podobně):

$$\lim_{r\to 0+} \frac{f(x+r)-f(x+)}{r} = \lim_{r\to 0+} \frac{f'(x+r)}{1} \in \mathbb{R}$$

dle l'Hospitala typ „$\frac{0}{0}$"

a předpoklad: $f'$ po částech spojité...

Věta 21.3. [O hladkosti součtu trig. řady]

dk. $N=0$, označme:

$$\boxed{h_k(x) = a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx}$$

$$|h_k(x)| \leq |a_k| \cdot \underbrace{|\cos kx|}_{\leq 1} + |b_k| \cdot \underbrace{|\sin kx|}_{\leq 1}$$

$$\leq |a_k| + |b_k| \leq \frac{c}{k^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

víme: $\sum_k \frac{c}{k^2}$ konverguje, a tedy

Věta 16.9. $\Rightarrow \sum h_k(x)$ konv. stejnoměrně v $\mathbb{R}$

dále: $h_k(x)$ spojité v $\mathbb{R}$

Věta 16.13 $\Rightarrow f(x)$ spojité, neboli $C^0$ v $\mathbb{R}$

---

$N=1$: podobně jako výše ukážu, že

$$|h_k(x)| \leq \frac{c}{k^3}, \text{ odsud pak}$$

$\sum h_k(t)$ konv. stejn., $f(t)$ spojité.

<u>vyšetření derivace</u>:

$h_k'(x) = -k a_k \sin kx + k b_k \cdot \sin kx$

$|h_k'(x)| \leq |k a_k| \cdot |\sin kx| + |k b_k| \cdot |\cos kx|$

$$\leq k(|a_k| + |b_k|) \leq \frac{k \cdot C}{k^3} = \frac{C}{k^2}$$

opět dle Věty 16.9. $\Rightarrow \sum h_k'(x)$ konv. stejnoměrně v $R$

dále dle Věty 16.15 $\Rightarrow f'(x) = \sum_k h_k'(x)$, pro $\forall x \in \mathbb{R}$

Konečně, řada $\sum_k h_k'(t)$ je spojitá v $R$

($\Leftarrow$ spojitost $h_k'(x)$, Věta 16.13)

a tedy $f'(x)$ je spojitá, tj. $f(x)$ je $C^1$